Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2006–2007-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c pozitív egészre $(a,b)(a,c)[b,c]$ osztója abc-nek. (A szokásos módon (x,y), illetve $[x,y]$ az x és y legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét jelöli.)

2. Adott N és k pozitív egészekre megszámoltuk, hogy az N számot hányféleképpen lehet felírni $a+b+c$ alakban, ahol $1 \le a,b,c \le k$, és az összeadandók sorrendje is számít. Kaphattunk-e eredményül 2006-ot?

3. Bálint 200 forintot fizet Annának, ha a (90-ből 5-ös) lottón a kihúzott számok szorzatának utolsó számjegye 0 lesz (tízes számrendszerben), viszont Anna fizet Bálintnak 300 forintot, ha nem ez a helyzet. Hosszabb távon kinek előnyös ez a megállapodás?

4. Az ABC háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az A, B, illetve C csúcsnál rendre α, β és γ. A B csúcsot az A pont körül negatív irányban elforgatjuk α szöggel, majd az így kapott B_1 pontot a B pont körül negatív irányban elforgatjuk β szöggel, és végül az így nyert B_2 pontot a C pont körül negatív irányban γ szöggel elforgatva a B_3 pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a B, B_3 pontok és az ABC háromszög beírt körének O középpontja.

5. Töltsük ki a teret páronként kitérő egyenesekkel.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.