A döntő feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely H háromszöghöz található olyan e egyenes, hogy H-nak az e-re vonatkozó tükörképe H területének több, mint a $3/4$ részét lefedi.

2. Jelölje p_i az i-edik prímszámot, és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. (Tehát pl. $Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.) Igazoljuk, hogy az $1, 2, \ldots, Q_k$ számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \ldots, p_k$ közül páratlan sokkal osztható.

3. Adottak az n és k pozitív egészek, ahol $n \geq k+2$. Legyenek továbbá az n elemű H halmaznak $A_1, \ldots, A_m$ olyan k elemű részhalmazai, hogy

(1) H minden egyelemű részhalmaza előáll néhány A_i metszeteként; de

(2) az A_i-k közül bármelyiket elhagyva (1) már nem teljesül.

(a) Mutassuk meg, hogy $m \leq kn$.

(b) Lássuk be, hogy az A_i-k alkalmas megválasztásával $m \geq kn - k^2$ elérhető.