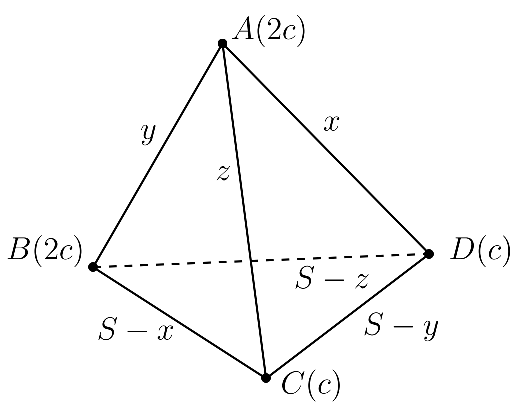
Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2010-2011. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória (GIMNÁZIUM) számára

1. Egy tetraéder éleire valós számokat írtunk úgy, hogy a kitérő élekre írt számok összege ugyanannyi legyen. Ezután minden csúcshoz hozzárendeltük az oda befutó élekre írt számok összegét. Ezek az összegek valamilyen sorrendben az a, b, c, és d számok, amelyekre $a = b = 2c = 2d$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok között a 0 szám is előfordul.

Megoldás: Mivel a csúcsoknak nincs kitüntetett szerepe, feltehető, hogy a C és D csúcsokhoz a c összeg, míg az A és B csúcsokhoz a $2c$ összeg tartozik. 1 pont

Ha a kitérő éleken levő számok összege S és az AB élen y áll, akkor a CD élen $S - y$. Használjuk az ábra jelöléseit, a csúcsoknál álló számot a csúcsot jelölő betű mögé írtuk zárójelben. Az A-ból és B-ből induló élek számait összeadva:

$$2c + 2c = 4c = x + y + z + (S - x) + (S - z) + y = 2S + 2y. \qquad \text{2 pont}$$



Ugyanígy a C és D csúcsba futó élek számait összeadva:

$$c + c = 2c = 2S - x - y + z + 2S - y - z + x = 4S - 2y. \qquad \text{2 pont}$$

A kapott két egyenletet egybevetve

$$2S + 2y = (4S - 2y) \cdot 2 = 8S - 4y \quad \text{azaz} \quad S = y,$$

tehát a CD él száma a 0. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Tekintsük az $y = x^2$ parabolát. Keressük meg az összes olyan egész meredekségű egyenest, ami áthalad a $P(0;4)$ ponton és a parabolába eső szakasza egész hosszúságú.

Megoldás: A P ponton áthaladó y tengellyel párhuzamos egyenes a parabolát csak egy helyen metszi, ez nem megfelelő. 1 pont

A többi P-n áthaladó egyenes egyenlete felírható $y - 4 = mx$ alakban, ahol az m paraméter jelöli az egyenes meredekségét, a feladat feltétele szerint m egész szám.

A parabola és az egyenes A és B metszéspontjait kiszámoljuk.

$$x^2 - 4 = mx \quad \text{ahonnan} \quad x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2+16}}{2}$$

$$A\left(\frac{m+\sqrt{m^2+16}}{2}; \left(\frac{m+\sqrt{m^2+16}}{2}\right)^2\right) \quad B\left(\frac{m-\sqrt{m^2+16}}{2}; \left(\frac{m-\sqrt{m^2+16}}{2}\right)^2\right)$$

1 pont

Innen

$$AB^2 = \left(\sqrt{m^2+16}\right)^2 + \left(m\sqrt{m^2+16}\right)^2 = (m^2+1)(m^2+16).$$

Legyen $m^2 + 1 = k$ és $AB^2 = d$, ekkor

$$k(k+15) = d^2. \tag{1}$$

1 pont

Használjuk ki, hogy

$$k^2 < k(k+15) < (k+8)^2,$$

ezért $k(k+15)$ lehet $(k+b)^2$, ahol $b \in \{1, 2, ..., 7\}$. 2 pont

A hét lehetőséget végigpróbálva akkor kapunk egész k-t, ha b értéke 3, 5, 6, 7, a hozzájuk tartozó k értékek az 1, 5, 12, 49. Mivel $k - 1 = m^2$, ezért csak a $k = 1$ és $k = 5$ ad jó megoldást. A megfelelő meredekségek az $m_1 = 0$, $m_2 = 2$ és $m_3 = -2$. A hozzájuk tartozó húrok hossza $d_1 = 4$, illetve $d_{2,3} = 10$. A feladat feltételeinek eleget tevő egyenesek:

$$y = 4, \quad y = 2x + 4, \quad y = -2x + 4.$$

2 pont

Összesen: 7 pont.

Megadunk egy másik lehetséges elindulást is. A P-n áthaladó egyenes és a parabola két további metszéspontja legyen $A(u; u^2)$ és $B(v; v^2)$. Az egyenes meredekségét felírjuk A és P, illetve B és P segítségével:

$$\frac{4-u^2}{-u} = \frac{v^2-4}{v} \quad \text{amiből} \quad uv = -4.$$

A meredekség A és B segítségével $\frac{v^2-u^2}{v-u} = v + u$, tehát $v + u$ egész, uv is egész, ezért $v^2 + u^2$ is egész. Most felírjuk az AB húr hoszának négyzetét:

$$AB^2 = (v-u)^2 + (v^2-u^2)^2 = (v-u)^2(1+(u+v)^2) = (u^2+v^2+8)(u^2+v^2-7).$$

Innen $u^2+v^2-7=k$ helyettesítéssel az (1) egyenlethez jutunk és a fenti megoldás szerint fejezhetjük be.

3. Keressük meg a 2011-nél nagyobb egészek közt a legkisebb olyan S számot, amelyet elosztva a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokkal, maradékul kétszer kapjuk az 1, 2, 3 számok mindegyikét.

Megoldás: Ha S páros, akkor a 4, 6 és 8-as maradék is páros lenne, de csak két esetben kaptunk páros maradékot, tehát S páratlan és így a 4, 6 és 8-as maradék is páratlan.
1 pont

Ezek szerint a 6-os maradék 1, vagy 3, ez utóbbi esetben viszont a szám 3-as maradéka 0 lenne. 1 pont

Ebből az következik, hogy S 3-as és 6-os maradéka 1, 4-es és 8-as maradéka 3, 5-ös és 7-es maradéka 2. 1 pont

Mivel a 3 osztója a 6-nak, a 4 pedig a 8-nak, a továbbiakban elegendő arra figyelnünk, hogy S 6-os maradéka 1, 8-as maradéka 3 legyen. 1 pont

Mivel az 5-ös és a 7-es maradék egyaránt 2, ezek szerint $S-2$ osztható 5-tel és 7-tel, így legkisebb közös többesükkel a 35-tel is, azaz $S=35k+2$ alakú. 1 pont

35+2=37, a 37-nek a 6-os maradéka éppen 1, így $S-37$ osztható az 5, 6, 7 számokkal, tehát a legkisebb közös többesükkel a 210-zel is, azaz $S=210t+37$ alakú. 1 pont

A 2011-nél nagyobb $210t+37$ alakú számok közül az első a 2137, de ennek 8-as maradéka nem 3. A következő a 2347, ennek 8-as maradéka 3. A keresett szám a 2347. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Igazoljuk, hogy a t területű $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha

$$(AB+CD)(DA+BC)=4t.$$

Megoldás: Legyenek az $ABCD$ négyszög szögei a megfelelő csúcsoknál rendre α, β, γ és δ. Ekkor

$$2t = AB\cdot DA\sin\alpha + BC\cdot CD\sin\gamma$$

$$2t = AB\cdot BC\sin\beta + CD\cdot DA\sin\delta$$

2 pont

Ezek összege felülről becsülhető, hiszen minden szög szinusza legfeljebb 1 lehet.

$$4t = AB\cdot DA\sin\alpha + BC\cdot CD\sin\gamma + AB\cdot BC\sin\beta + CD\cdot DA\sin\delta \le$$

$$\le AB\cdot DA + BC\cdot CD + AB\cdot BC + CD\cdot DA = (AB+CD)(DA+BC)$$

3 pont

Ha a négyszög téglalap, akkor minden szög szinusza 1, így egyenlőség van. 1 pont

Ha egyenlőség van, az csak úgy lehet, ha minden szög szinusza 1, ami azt jelenti, hogy minden szög derékszög, azaz $ABCD$ téglalap. 1 pont

Összesen: 7 pont.