Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011-2012. tanévi első fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2 - x - 3)^4 + (2x^2 - x - 3)^2(2x^2 + x - 6)^2 + (2x^2 + x - 6)^4 = 0$$

2. Az ABC háromszög belső D pontján áthaladó AD, BD és CD egyenesek a szemközti oldalakat rendre az E, F, G pontokban metszik. A következő területek mérőszámait ismerjük: $T_{ADG} = 40$, $T_{BDG} = 30$, $T_{BDE} = 35$, $T_{CDF} = 84$.

Mekkora az ABC háromszög területe?

3. Egy szabályos dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobott szám szorzata 10-zel osztható?

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 8x}}{\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 7} = \frac{7}{\sqrt{x + 1}}$$

5. Adott a síkon három pont A, B és C, melyek nincsenek egy egyenesen. Felveszünk a pontok síkjában egy e egyenest. Ha a P pont az e egyenesen van, vizsgáljuk az

$$L = PA^2 - PB^2 + \lambda PC^2$$

kifejezés értékét, ahol $\lambda \neq 0$. Úgy szeretnénk λ értékét megválasztani, hogy L éppen akkor legyen minimális, amikor P az ABC háromszög súlypontjának az e egyenesre eső merőleges vetülete.

Az e egyenes tetszőleges helyzetében megválasztható-e a kívánt módon λ értéke?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.