



Oktatási Hivatal

A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Az $ABCD$ négyzet köré írt körön adott a P és Q pont úgy, hogy $\angle PAQ = 45^\circ$, továbbá AP és BC metszi egymást az M , AQ és CD az N pontban. Mutassuk meg, hogy a PQ és az MN szakaszok párhuzamosak.

2. Anna és Bori tulipánokat ültetnek egy sorba, n helyre. Ezt a következő játékos formában teszik: felváltva ültetnek egy-egy tulipánt úgy, hogy egymással közvetlenül szomszédos helyekre nem kerülhet tulipán. Anna kezdi a játékot. Az nyer, aki utoljára tud tulipánt ültetni. Kinek van nyerő stratégiája, ha (a) $n = 2013$; (b) $n = 12$?

3. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}$ 1-nél kisebb pozitív valós számok, melyek szorzata A , valamint legyen $A_i = \frac{A}{a_i}$, $i \in \{1; 2; \dots; 2014\}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 < \frac{1}{\log_{a_1}(a_1 a_2)} + \frac{1}{\log_{a_2}(a_2 a_3)} + \dots + \frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014} a_1)} < \frac{1}{\log_{A_1} A} + \frac{1}{\log_{A_2} A} + \dots + \frac{1}{\log_{A_{2014}} A}$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.