A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

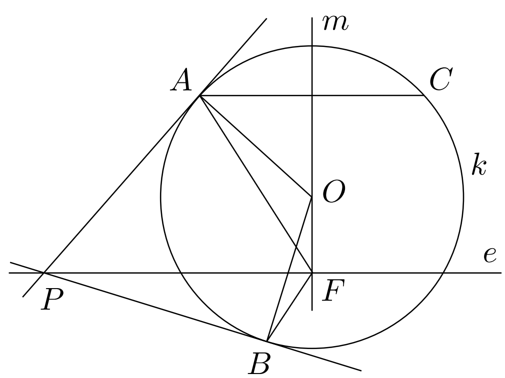
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

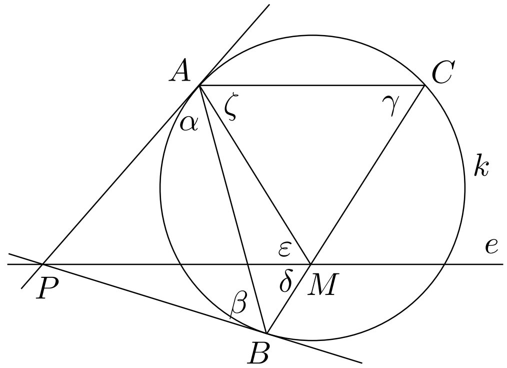
A k körhöz egy külső ponton keresztül egy e szelőt és két érintőt húzunk, az utóbbiak érintési pontjai A és B. Az A ponton áthaladó, e-vel párhuzamos egyenes az A-tól különböző C pontban is metszi k-t. Bizonyítsuk be, hogy a BC egyenes felezi e-nek a k-ba eső szakaszát.

Első megoldás: Legyen P az adott külső pont, O a kör középpontja, és F a szóban forgó felezőpont, azaz az O-ból e-re bocsátott m merőleges egyenes talppontja. Belátjuk, hogy B, F és C kollineáris, ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.



Thalész tétele miatt A, B és F illeszkedik a PO átmérőjű körre. A PFB szög és az AFP szög ebben a körben az egyenlő PB és PA ívekhez tartozó egy-egy kerületi szög, ezért $PFB\sphericalangle = AFP\sphericalangle$. Az m egyenesre vonatkozó tükrözésnél az A pont C-be, az e egyenes pedig önmagába megy át. Ezért az AFP szög tükörképe a PFB szög csúcsszöge, ahonnan B, F és C kollinearitása következik. (Mindezek a megállapítások attól függetlenül érvényesek, hogy az O pont az e egyenesnek melyik oldalára esik, illetve hogy illeszkedik-e rá.)

Második megoldás: Legyen M az e és BC metszéspontja. Használjuk a második ábra szerint keletkező hat szögre az α, β, γ, δ, ε, ζ jeleket. Először megmutatjuk, hogy ezek a szögek egyenlők.



Az $\alpha = \beta$ egyenlőség nyilvánvaló az érintők szimmetriájából, $\beta = \gamma$ abból adódik, hogy mindketten az AB ívhez tartozó kerületi szögek, γ és δ pedig az $AC \parallel e$ feltevés miatt egyállású szögek.

Az $\alpha = \delta$ egyenlőségből következik, hogy a $PBMA$ négyszög húrnégyszög, ebből pedig $\beta = \varepsilon$ adódik. Végül ismét $AC \parallel e$ felhasználásával $\varepsilon = \zeta$, mert váltószögek.

Az ACM háromszögben tehát az AC oldalon fekvő szögek egyenlők. Ezért M illeszkedik AC felező merőlegesére. Ez az egyenes felezi az összes AC-vel párhuzamos húrt, tehát M is felezi közülük azt, amelyik e-n fekszik.

2. feladat

Tegyük fel, hogy nemnegatív egész számoknak egy véges $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k\}$ és egy végtelen $B = \{b_1 < b_2 < \ldots\}$ halmazára teljesül, hogy minden nemnegatív egész egyértelműen előáll $a_i + b_j$ alakban. Mutassuk meg, hogy ekkor B szükségképpen „tisztán periodikus”, azaz létezik olyan $c > 0$, hogy bármely b nemnegatív egész szám pontosan akkor eleme B-nek, ha $b + c$ is az.

Megoldás: Nyilván $a_1 = 0$ (és $b_1 = 0$). Emiatt $n \in B$ pontosan azt jelenti, hogy n csak $n = 0 + n$ alakban áll elő $a + b$ alakban, tehát $n - a_2, n - a_3, \ldots, n - a_k$ egyike sem eleme B-nek. Ha viszont $n \notin B$, akkor $n = a + b$ előállításában $a_2, a_3, \ldots, a_k$ valamelyike szerepel a-ként, azaz $n - a_2, n - a_3, \ldots, n - a_k$ közül (pontosan) az egyik B-beli. Ezzel beláttuk, hogy

$$n \in B \iff n - a_2, n - a_3, \ldots, n - a_k \notin B.$$

Ugyanígy adódik a „másik irányban” is egy hasonló összefüggés:

$$n \in B \iff n + a_k, n + a_k - a_2, \ldots, n + a_k - a_{k-1} \notin B.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy $d = a_k - 1$ hosszúságú tetszőleges $[x, y]$ intervallumon, amelynek a végpontjai pozitív egészek, adottak B elemei, akkor $x - 1$-ről, illetve $y + 1$-ről egyértelműen kiderül, hogy eleme-e B-nek vagy sem. Egy ilyen intervallumon a B-beli elemek elhelyezkedése legfeljebb 2^{d+1}-féle lehet, tehát lesz olyan $x_1 < x_2$, amelyre az $[x_1, x_1 + d]$ és $[x_2, x_2 + d]$ intervallumon a B-beli elemek elhelyezkedése ugyanolyan. Ez a fentiek alapján azt jelenti, hogy B elemei egy $c = x_2 - x_1$ hosszúságú periódus szerint ismétlődnek.

3. feladat

Melyek azok az egész együtthatós f polinomok, amelyekre minden $j \geq 1$ esetén $f(2^j)$ pozitív prímhatvány?

Első megoldás: Az $f(x) = 2^m x^n$ $(m \geq 0, n > 0)$, valamint a konstans prímhatvány polinomok nyilván megfelelnek. Megmutatjuk, hogy más ilyen polinom nincs.

Az egytagú polinomok közül nyilván csak ezek jók. Tegyük fel, hogy létezik egy legalább kéttagú ilyen f, azaz $f(x) = a_n x^n + g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, ahol (a feltételből következően pozitív) a_n-en kívül még legalább egy együttható nem nulla.

Fel fogjuk használni az alábbi ismert tényt, amelyet a teljesség kedvéért be is bizonyítunk.

($*$) Elég nagy r-re $f(r)$-ben az $a_n r^n$ tag „dominál”, azaz (például) $3a_n r^n/2 > f(r) > a_n r^n/2$, ha r elég nagy.

Valóban, ha c jelöli az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ együtthatók abszolút értékének maximumát, akkor ($r \geq 1$ esetén)

$$|g(r)| = |f(r) - a_n r^n| = |a_0 + a_1 r + \ldots + a_{n-1}r^{n-1}| \leq cnr^{n-1} < \frac{1}{2}a_n r^n,$$

ha $r > 2nc/a_n$, amivel ($*$)-ot beláttuk.

Rátérve a feladat állításának igazolására, először tegyük fel, hogy a_0 páros. Ekkor $f(2^j)$ páros, tehát a feltétel alapján kettőhatvány. Válasszunk egy olyan j értéket, amelyre $r = 2^j$ teljesíti ($*$)-ot, továbbá $g(2^j) \neq 0$ (ilyen j van, hiszen egy nem nulla polinomnak csak véges sok gyöke lehet), és végül legyen $j > h$, ahol h a 2 kitevőinek maximuma az $f(x)$ nem nulla együtthatóinak prímtényezős felbontásában.

A feltétel szerint $f(2^j) = 2^u$. Jelölje s a 2 kitevőjét az a_n prímtényezős felbontásában. Ekkor $a_n 2^{jn}$-ben a 2 kitevője $s + jn$, $g(2^j)$-ben pedig a 2 kitevője legfeljebb $j(n-1) + h$ (mert a nemnulla tagokban a 2 kitevője $h < j$ miatt páronként különböző, ezért a legkisebb kitevő „nyer”), és ez (ismét $h < j$ miatt) kisebb, mint jn, tehát ($*$) alapján $u = s + nj$. Ez azonban (ismét felhasználva ($*$)-ot is) $g(2^j) \neq 0$ miatt lehetetlen.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a_0 páratlan. Ekkor $f(2^j)$ páratlan, tehát egy páratlan prím hatványa kell hogy legyen. Elég nagy r-re $f(r) > 1$ (például ($*$) alapján), ezért választhatunk olyan K értéket, amelyre $A = f(2^K) > 1$.

Mivel A páratlan, ezért van olyan N, hogy 2^N-nek 1 a maradéka A^2-tel osztva. Ez adódik az Euler–Fermat-tételből, vagy abból, hogy az $A^2 + 1$ darab $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{A^2}$ szám nem adhat csupa különböző maradékot A^2-tel osztva, így alkalmas $v < w$-re $A^2 \mid 2^w - 2^v = 2^v(2^{w-v} - 1)$, és mivel $(A^2, 2^v) = 1$, ezért $A^2 \mid 2^{w-v} - 1$.

Az előzőek alapján minden t-re is igaz, hogy 2^{tN}-nek az A^2-tel való osztási maradéka 1.

Tudjuk, hogy $B_t = f(2^{tN+K}) = p_t^{d_t}$ valamilyen p_t prímmel. Az előzőekből adódik, hogy B_t-nek az A szerinti osztási maradéka ugyanaz, mint $f(2^K) = A$ maradéka, vagyis 0, azaz $A \mid p_t^{d_t}$. Ez azt jelenti, hogy A prímhatvány, $A = q^e$ $(e \geq 1)$, és minden t-re $B_t = q^{d_t}$. Az előző meggondoláshoz hasonlóan kapjuk, hogy B_t-nek az A^2 szerinti osztási maradéka A, tehát $B_t = q^{d_t}$ a q-nak legfeljebb e-edik hatványával osztható, azaz $d_t \leq e$. Azonban elég nagy t-re $q^{d_t} = f(2^{tN+K}) > q^e$, ami ellentmondás.

Második megoldás: Az első megoldás jelöléseit használjuk, és most is feltesszük, hogy egy legalább kéttagú f kielégíti a feltételt, és kicsit másképp jutunk ellentmondásra.

Szükségünk lesz a $(*)$-nak az alábbi erősebb változatára, ami ugyanúgy bizonyítható:

$$(**) \qquad \frac{f(r)}{a_n r^n} \to 1, \text{ ha } r \to \infty.$$

Legyen először a_0 páros, azaz $f(2^j)$ kettőhatvány, és legyen k a legkisebb olyan egész, amelyre $a_k \neq 0$, a feltevésünk szerint $k < n$. Legyen $a_k = 2^b z$, ahol z páratlan, ekkor $j > b$ esetén $f(2^j) = 2^{kj+b}(z + 2R)$ alkalmas R egésszel. Mivel $f(2^j)$ kettőhatvány, és a második tényező páratlan, ezért ez a tényező 1, azaz $f(2^j) = 2^{kj+b}$. Innen $(**)$ alapján $j \to \infty$ esetén

$$\frac{2^{kj+b}}{a_n 2^{nj}} = 2^{(k-n)j} \cdot \frac{2^b}{a_n} \to 1,$$

ami $k \neq n$ miatt lehetetlen.

Rátérve a páratlan a_0 esetére, az első megoldásbeli gondolatmenet elejét $A = f(2^K)$ egy q prímosztójára elvégezve kapjuk, hogy $B_t = f(2^{tN+K}) = q^{d_t}$. Ekkor $(**)$ alapján $t \to \infty$ mellett

$$\frac{q^{d_t}}{a_n 2^{(tN+K)n}} \to 1,$$

és így elég nagy t-re

$$0{,}9 < \frac{q^{d_t}}{a_n 2^{(tN+K)n}} < 1{,}1\,.$$

Ezt t-re és $t+1$-re felírva, majd a két egyenlőtlenséget egymással elosztva

$$0{,}8 < \frac{q^{d_{t+1}-d_t}}{2^{nN}} < 1{,}3$$

adódik. Ez utóbbit is t-re és $t+1$-re felírva, majd a két egyenlőtlenséget egymással elosztva kapjuk, hogy

$$0{,}6 < \frac{q^{d_{t+2}-d_{t+1}}}{q^{d_{t+1}-d_t}} < 1{,}7\,.$$

Mivel $q \geq 3 > \dfrac{1{,}7}{0{,}6}$, ezért $d_{t+2} - d_{t+1} = d_{t+1} - d_t$. A közös értéket L-lel jelölve, így elég nagy rögzített t-re bármely M esetén $d_{t+M} = d_t + ML$. Ezt $(**)$-ba beírva, $M \to \infty$ mellett

$$\frac{q^{d_t+ML}}{a_n 2^{((t+M)N+K)n}} = \frac{q^{d_t}}{a_n 2^{(tN+K)n}} \cdot \left(\frac{q^L}{2^{Nn}}\right)^M = C \cdot D^M \to 1\,.$$

Innen $D = 1$, azaz $q^L = 2^{Nn}$, ami ($n > 0$ miatt) nem lehetséges.