A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Számítsuk ki a következő összeg értékét:

$$N = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + 9 \cdot 11 - 13 \cdot 15 + ... - 197 \cdot 199 + 201 \cdot 203.$$

Megoldás: Az összeg értéke sokféleképpen meghatározható. Egy lehetséges módszer, hogy a számokat négyes csoportokban vesszük sorra. Ha a négy szám átlagát k jelöli, akkor a csoporton belül a következőt kapjuk:

$$(k-3) \cdot (k-1) - (k+1) \cdot (k+3) = -8k.$$ 2 pont

Az első csoport átlaga 4, innen 8-asával nő, így

$$N = -8 \cdot (4 + 12 + 20 + 28 + ... + 196) + 201 \cdot 203.$$ 2 pont

Számoljuk ki először a zárójelben szereplő összeget, ennek tagjai 8 differenciájú, 25 tagú számtani sorozatot alkotnak:

$$4 + 12 + 20 + 28 + ... + 196 = \frac{1}{2} \cdot (4 + 196) \cdot 25 = 2500.$$ 2 pont

Innen $N = -8 \cdot 2500 + 201 \cdot 203 = -20000 + 40803 = 20803.$ 1 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző türelemmel és hibátlanul számológéppel kiszámolja az összeget, akkor is 7 pontot kap. Amennyiben számológéppel számol, gondolatmenetet nem közöl és eredménye hibás, 0 pontot kap.

2. A pozitív egészekből álló $d_1, d_2, ..., d_k$ sorozatot az n osztóláncának nevezzük, ha $d_1 = 1$ és $d_k = n$, továbbá a sorozat minden tagja -az utolsó kivételével- osztója a következő tagnak. Például $n = 6$ esetén három ilyen osztólánc van, ezek az 1,6; 1,2,6; és az 1,3,6. Hány osztólánc van, ha (a) n= 1024; (b) n=999; (c) n=1000?

Megoldás: Egy szám osztóinak áttekintését megkönnyíti, ha ismerjük a prímtényezős felbontását. Ez a feladatban szereplő három n érték esetén: $1024 = 2^{10}$, $999 = 3^3 \cdot 37$, $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. 1 pont

(a) Az 1024 minden osztója kettőhatvány, 2^i alakú, ahol $i = 0, 1, ..., 10$. Ezen számok közül bármely kettőt véve a kisebb osztja a nagyobbat. Az osztólánc első eleme az 1, az utolsó az 1024, az összes többi osztóról szabadon eldönthetjük, hogy beletesszük egy osztóláncba, vagy sem. A $2^1, 2^2, ..., 2^9$ osztók kilencen vannak, mindegyik esetén a többitől függetlenül két lehetőségünk van, így az osztóláncok száma $2^9 = 512$. 2 pont

(b) A 999-nek 8 osztója van, ezek: 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999. Vegyük számba az osztóláncokat a szerint, hogy melyik a legkisebb 37-tel osztható szám a láncban. Minden ilyen szám előtt állhatnak osztói, utána pedig többesei. Ha ez a 37, akkor a láncban utána lehet a 111 és a 333. Két számról dönthetünk, ez $2^2 = 4$ láncot jelent. (1,37,999; 1,37,111,999; 1,37,333,999; és 1,37,111,333,999). Hasonlóan, ha ez a 111, akkor előtte dönthetünk a 3-ról, utána a 333-ról, újabb 4 lánc. Ha a 333, akkor előtte dönthetünk a 3-ról és a 9-ről, újabb 4 lánc. Végül ha ez a 999, akkor szabadon dönthetünk a 3, 9, 27 számokról, ez 8 láncot jelent. Összesen 20 ilyen lánc van. 2 pont

(c) Olyan módszert mutatunk, amely tetszőleges n szám esetén megadja a láncok $L(n)$ számát. Legyen $L(1) = 1$. Az n szám azon osztóláncainak száma, melyben az n-nél kisebb osztók közül a láncban szereplő legnagyobb osztó d, éppen $L(d)$. Így $L(n)$ értéke azon $L(d)$ számok összege, amelyekre d osztója n-nek és $d < n$. Az alábbi táblázat az 1000 osztóit tartalmazza, az i-dik sor j-dik eleme $d = 2^{i-1} \cdot 5^{j-1}$, mellé írjuk zárójelben $L(d)$ értékét. Az első i sor és j oszlop által meghatározott téglalap jobb alsó mezőjébe kerül $L(d)$, ami a téglalapban szereplő összes többi zárójeles szám összege. Az alábbi táblázat alapján a láncok száma $L(1000) = 252$. 2 pont

1 (1)	5 (1)	25 (2)	125 (4)
2 (1)	10 (3)	50 (8)	250 (20)
4 (2)	20 (8)	100 (26)	500 (76)
8 (4)	40 (20)	200 (76)	1000 (252)

Összesen 7 pont

3. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

Megoldás: Az első gyökjel alatti másodfokú kifejezésből kiemelünk 2-t, majd teljes négyzetté alakítunk: $2 + 4x - 2x^2 = 2(2 - (x - 1)^2)$. 1 pont

Ennek legnagyobb értéke a 4 és ezt az $x = 1$ helyen veszi fel. 1 pont

Hasonlóan a másik gyökjel alatt $6 + 6x - 3x^2 = 3(3 - (x - 1)^2)$ áll, ennek legnagyobb értéke 9, ezt az $x = 1$ helyen veszi fel. 1 pont

Azt kaptuk, hogy a bal oldal legnagyobb értéke $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$ és ezt az $x = 1$ helyen veszi fel. 1 pont

A jobb oldalon is alakítsunk teljes négyzetté: $x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5$. 1 pont

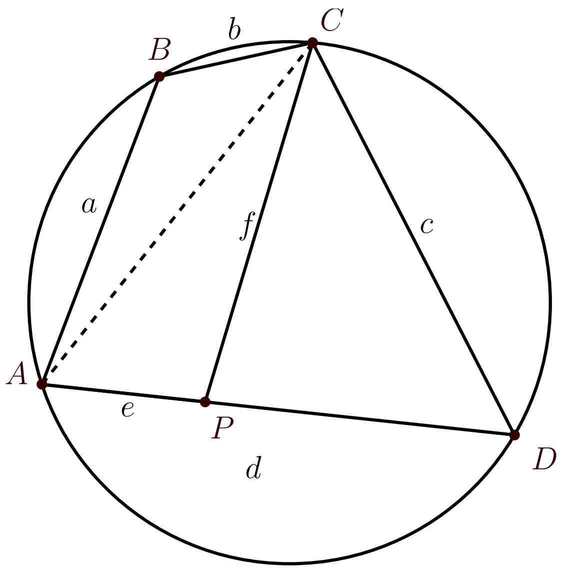
A jobb oldal legkisebb értéke az 5 és ezt az $x = 1$ helyen veszi fel. 1 pont

Mivel a bal oldal legnagyobb lehetséges értéke és a jobb oldal legkisebb lehetséges értéke egyaránt az 5, ezért egyenlőség csak akkor van, amikor mindkét oldal éppen 5. Ez egyetlen x érték esetén teljesül, amikor $x = 1$. 1 pont

Összesen 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ húrnégyszög AD oldalán van olyan P pont, hogy a CDP háromszög és az $ABCP$ négyszög kerülete és területe is megegyezik, akkor az $ABCD$ négyszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala.

Megoldás: Használjuk az alábbi ábra jelöléseit:



Az ACP és CDP háromszögek egyik oldalegyenese közös, így $\frac{T_{ACP}}{T_{CDP}} = \frac{e}{d-e}$, ebből

$$T_{ACP} = \frac{e}{d-e} \cdot T_{CDP}.$$ 1 pont

Jelölje az $ABCD$ négyszög B csúcsánál levő szögét β, ekkor a D-nél levő szög $180° - \beta$. Számoljuk ki a területeket:

$$T_{CDP} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin(180° - \beta)}{2} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin\beta}{2},$$ 1 pont

$$T_{ABCP} = T_{ABC} + T_{ACP} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\beta}{2} + \frac{e}{d-e} \cdot \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin\beta}{2}.$$ 1 pont

Az $ABCP$ és CDP területeinek egyenlőségéből:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin\beta}{2} + \frac{e \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin\beta}{2}.$$

Felszorozva, majd átrendezve: $a \cdot b = c \cdot (d - 2e)$. 1 pont

A kerületek egyenlőségéből $a + b + f + e = f + c + d - e$, amiből $a + b - c = d - 2e$ adódik. 1 pont

Összevetve az előzővel: $a \cdot b = c \cdot (a + b - c)$, azaz $(a - c) \cdot (b - c) = 0$. 1 pont
Ezzel az állítást bizonyítottuk, a négyszög a és c, vagy b és c oldala egyenlő.
1 pont

Összesen 7 pont

5. Két autóbusz indul ugyanabban az időpontban ugyanazon az úton, az egyik Piripócsról Nekeresdre, a másik ellenkező irányban, Nekeresdről Piripócsra. A buszok sebessége állandó, az arányuk 6:5, az a gyorsabb, amelyik Piripócsról indul. Az út mentén minden kilométernél van egy kilométerkő. Megérkezéskor a buszok pontosan 30 percig várakoznak, majd ugyanazon az útvonalon indulnak vissza, így közlekednek egész nap a két város közt oda-vissza. Másodszor a 156-os kilométerkőnél találkoznak, harmadszor pedig a 128-asnál.

Hanyadik kilométerkőnél lehetett az első találkozás? Hanyadik kilométerkőnél lehet a piripócsi buszmegálló?

Megoldás: Osszuk fel az utat 11 egyenlő részre, nevezzük ezeket egységeknek. Mivel a buszok sebességének aránya 6:5, ezért az első találkozás Piripócstól 6 egységnyire lesz.
1 pont

Mivel mindkét busz ugyanannyi ideig várakozik, ezért úgy is tekinthetjük, mintha azonnal fordulnának.

Az első találkozástól a második találkozásig a két busz együtt a városok közti út kétszeresét teszi meg. 1 pont

A gyors busz a két találkozás közt 12 egységet tett meg. Ebből az első találkozás után 5 Nekeresdig, majd 7 Nekeresdről Piripócs irányába. Így a második találkozás Piripócstól 4 egységnyire történt. 1 pont

A második és harmadik találkozás közt is ugyanez a helyzet, tehát a gyors busz 12 egységnyit tesz meg. Ebből 4, míg visszaér Piripócsra, majd innen Nekeresdre menet még megtesz 8 egységet a harmadik találkozásig. 1 pont

Azt kaptuk, hogy Piripócsról számítva az első találkozás 6 egységnyire, a második 4 egységnyire a harmadik 8 egységnyire történt. Ez azt jelenti, hogy az első találkozás a második és a harmadik közt félúton, azaz a 142-es kilométerkőnél volt. 1 pont

Mivel 156-128=28, ezért egy egység 7 kilométer. A 156-os kilométerkő Piripócstól 4 egységnyire van, a 128-as pedig 8-ra, így a piripócsi buszmegálló a 184-es kilométerkőnél van. 2 pont

Összesen 7 pont