



OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA  
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem eleme az

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$$

függvény értelmezési tartományának?

2. feladat Egy egységoldalú négyzet minden oldalán kiválasztunk egy-egy belső pontot; ezek egy konvex négyszög csúcsai, amelynek oldalai :  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4.$$

3. feladat A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány olyan számnégyes van, amelynél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható, ha a négy egymást követő páratlan szám mindegyike kisebb 1000-nél?

4. feladat Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

5. feladat Egy egység sugarú körbe írt  $ABCD$  négyszög két szomszédos szöge  $60^\circ$ -os, illetve  $90^\circ$ -os. A négyszög tetszőleges  $P$  belső pontját az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  oldalegyenesekre tükrözve rendre a  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  pontokat kapjuk.

(a) Határozzuk meg az  $AKBLCMDN$  zárt töröttvonal hosszának a minimumát.

(b) Hol helyezkedik el a  $P$  pont a minimális hossz esetén?