OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA
II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. feladat Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem eleme az

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$$

függvény értelmezési tartományának?

Megoldás: Az értelmezési tartomány minden x elemére a gyök alatti kifejezés (harmadfokú polinom) nemnegatív. 1 pont

A polinomot szorzattá bontjuk:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2). \qquad \text{1 pont}$$

Ebből következik, hogy a polinom nulla helyei: -1, 0, 2.

Mivel vizsgálatunk pozitív x-ekre vonatkozik, ezért elegendő a polinom értékét a $]0;2[$ és a $[2;+\infty[$ intervallumokban megnéznünk. 2 pont

A $[2;+\infty[$ intervallumban a polinom nemnegatív, itt $f(x)$ minden x-re értelmezve van. A $]0;2[$ intervallumban viszont negatív, itt $f(x)$ nincs értelmezve. 2 pont

Ez utóbbi intervallumban egyetlen egész szám van, az $x = 1$. Tehát egy olyan pozitív egész van, amely nem tartozik a függvény értelmezési tartományába. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A szorzattá alakítás kikerülhető: $x \geq 3$ esetén $x^3 \geq 3x^2 > x^2 + 2x$, így elegendő az $x = 1$ és $x = 2$ értékeket megvizsgálni.

2. feladat Egy egységoldalú négyzet minden oldalán kiválasztunk egy-egy belső pontot; ezek egy konvex négyszög csúcsai, amelynek oldalai : a, b, c és d. Bizonyítsuk be, hogy

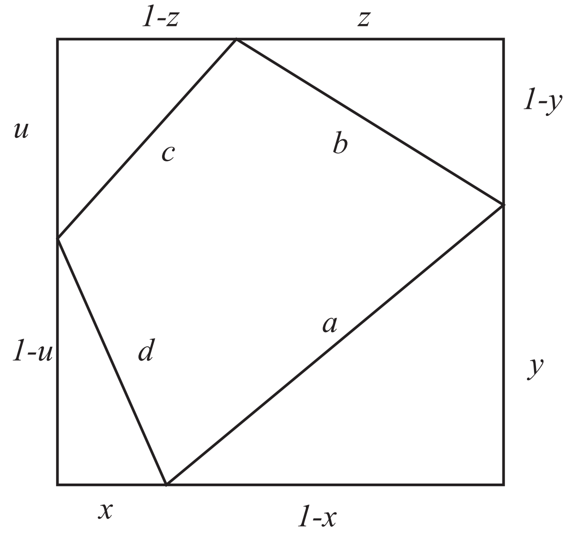
$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4.$$

Megoldás: A beírt négyszög csúcsai a négyzet oldalait (ábránknak megfelelően) x, $1-x$; y, $1-y$; z, $1-z$; u, $1-u$ hosszúságú szakaszokra vágják ketté. A négyzet csúcsainál kialakult derékszögű háromszögekre alkalmazva Pitagorasz tételét, előállíthatjuk az oldalak S négyzetösszegét:

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (1-x)^2 + y^2 + (1-y)^2 + z^2 + (1-z)^2 + u^2 + (1-u)^2 + x^2. \quad \text{1 pont}$$

Ezt az összeget átrendezhetjük:

$$S = \left[x^2 + (1-x)^2\right] + \left[y^2 + (1-y)^2\right] + \left[z^2 + (1-z)^2\right] + \left[u^2 + (1-u)^2\right]. \qquad \text{2 pont}$$



Mindegyik szögletes zárójelben ugyanaz a függvény szerepel. Esetünkben ennek értelmezési tartománya a $]0;1[$ intervallum; vizsgáljuk ezt a függvényt:

$$x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy a függvény a minimumát az $x = \frac{1}{2}$ helyen veszi fel és a minimum értéke $\frac{1}{2}$-del egyenlő, ezért

$$S \geq 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$ 2 pont

Ha függvényünk értelmezési tartományát a 0 és 1 helyekkel kibővítjük, ezeken a helyeken a függvényérték 1-gyel egyenlő és a másodfokú függvény tulajdonságainak megfelelően az intervallum többi (tehát az értelmezési tartományhoz tartozó) pontjában 1-nél kisebb, ezért

$$S < 4 \cdot 1 = 4,$$

és ezzel a feladat $2 \leq S < 4$ állítását bebizonyítottuk. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány olyan számnégyes van, amelynél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható, ha a négy egymást követő páratlan szám mindegyike kisebb 1000-nél?

Megoldás: A szóban forgó számok jelöléseit úgy választjuk, hogy négyzetösszegük viszonylag egyszerű kifejezés legyen; tehát a számok:

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1, \quad 2n+3.$$

Ezek négyzetösszege

$$(2n-3)^2 + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 16n^2 + 20 = 4(4n^2+5).$$ 1 pont

Ez akkor és csakis akkor osztható $36 = 4 \cdot 9$-cel, ha $4n^2 + 5$ osztható 9-cel. Viszont

$$4n^2 + 5 = 4n^2 + 5 + 4 - 4 = 4(n^2 - 1) + 9 = 4(n+1)(n-1) + 9,$$

ez pedig akkor osztható 9-cel, ha $(n+1)(n-1)$ is osztható. 2 pont

$n+1$ és $n-1$ különbsége 2, ezért csak egyikük lehet 3-mal osztható. Tehát $(n+1)(n-1)$ csak akkor osztható 9-cel, ha a tényezők valamelyike osztható, ha tehát $n+1=9k$ vagy $n-1=9m$ (k és m pozitív egészek), azaz

$$n = 9k-1 \quad \text{vagy} \quad n = 9m+1.$$ 2 pont

Az első esetben a számnégyes kezdő száma $18k-5$ alakú, a feladat feltételének a 13, 31, 49, ..., 985 kezdő számok felelnek meg, ahol $k=1,2,...,55$. A második esetben a kezdő szám alakja $18m-1$, a feltételeknek a 17, 35, 53, ..., 989 kezdő számok tesznek eleget, $m=1,2,...,55$. Tehát összesen 110 számnégyes elégíti ki a feltételeket. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 2^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{x}.$$

Megoldás: Áttekinthetőbbé válik a feladat, ha bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = u, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = v, \quad 3^x = w.$$

Ezekkel a jelölésekkel egyenletünk így alakul:

$$u^2+v^2+w^2 = uv+vw+wu.$$ 3 pont

Szorozzuk meg az egyenletet 2-vel, majd rendezzük át:

$$2u^2+2v^2+2w^2-2uv-2vw-2wu=0, \quad (u-v)^2+(v-u)^2+(w-u)^2=0.$$

Mivel nemnegatív számok összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyikük nullával egyenlő, ezért

$$u=v=w,$$ 2 pont

azaz

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 3^x.$$

Az $\frac{1}{2}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, a 3 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ezért csak egy megfelelő x érték lehet, ez pedig az $x=0$. Az eredeti egyenletnek az $x=0$ valóban megoldása.

2 pont

Összesen: 7 pont.

5. feladat Egy egységsugarú körbe írt $ABCD$ négyszög két szomszédos szöge 60°-os, illetve 90°-os. A négyszög tetszőleges P belső pontját az AB, BC, CD, DA oldalegyenesekre tükrözve rendre a K, L, M, N pontokat kapjuk.

(a) Határozzuk meg az $AKBLCMDN$ zárt töröttvonal hosszának a minimumát.

(b) Hol helyezkedik el a P pont a minimális hossz esetén?

Megoldás: A tükrözések miatt a töröttvonal szakaszai között kétszer szerepel a P pontot a csúcsokkal összekötő szakaszokkal egyenlő szakasz, pl. $PA = AK = AN$. Ezért a töröttvonal hossza kétszerese a P csúcsoktól mért távolságösszegének, $PA + PB + PC + PD$-nek. 2 pont

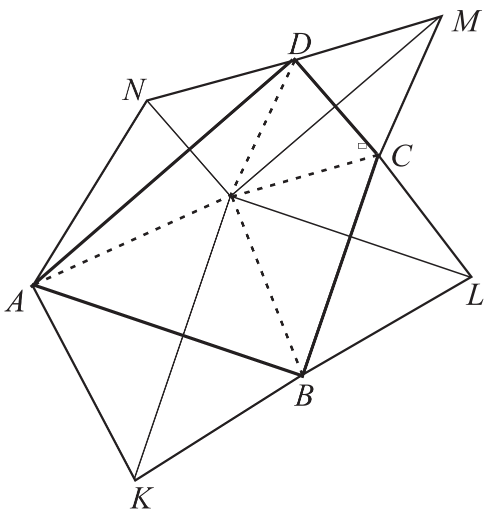
A háromszögegyenlőtlenséget alkalmazva (az esetleg egyenes szakasszá elfajuló) APC és BPD háromszögekre kapjuk, hogy

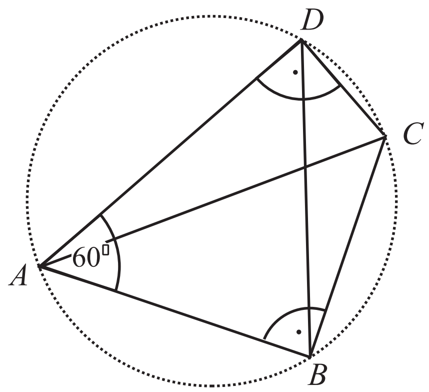
$$PA + PC \geq AC, \quad PB + PD \geq BD,$$

és ezekben egyenlőség csakis akkor állhat, ha P rajta van az AC illetve a BD átlón. E két egyenlőtlenséget összegezve

$$PA + PB + PC + PD \geq AC + BD$$

és egyenlőség csakis akkor áll, ha P az átlók metszéspontja; a töröttvonal ezért akkor a legrövidebb, ha P az átlók metszéspontja. Ezzel a (b) feladatrészre megadtuk a választ. 2 pont





Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy az A-nál levő szög 60°-os, illetve a B-nél levő szög 90°-os. Mivel $ADC\angle = ABC\angle = 90°$, az AC átló azonos a köré írt kör átmérőjével, tehát $AC = 2$. 1 pont

Az R sugarú körbe írt háromszögnél az α szöggel szemközti oldal hossza $2R \sin \alpha$, ezért

$$BD = 2 \sin 60° = \sqrt{3}.$$

A minimális töröttvonalhossz ezért

$$2(AC + BD) = 4 + 2\sqrt{3}.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont.