OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2020. november — A versenybizottság

1. feladat

Mely $n \geq 0$ egészekre lesz $625^n + 4^{2n+1}$ prímszám?

Megoldás: Az $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ azonosságot az $a = 5^n$ és $b = 2^n$ szereposztásban alkalmazva adódik, hogy

$$p = 625^n + 4^{2n+1} = (25^n + 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 4^n)(25^n - 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 4^n). \qquad \text{(5 pont)}$$

Ha $n \geq 1$, akkor p nem prímszám, mert mindkét tényező nagyobb 1-nél. Valóban, $25^n = 25 \cdot 25^{n-1} > 20 \cdot 10^{n-1} = 2 \cdot 10^n$. (1 pont)

Ha $n = 0$, akkor $p = 5$, ami prímszám. Ezért a feladat feltételeinek pontosan az $n = 0$ érték felel meg. (1 pont)

2. feladat

Legyenek az ABC háromszög oldalai a szokásos betűzéssel a, b, c, és a C csúcshoz tartozó magassága m. Bizonyítsuk be, hogy ha a C csúcsnál levő szög legfeljebb derékszög, akkor

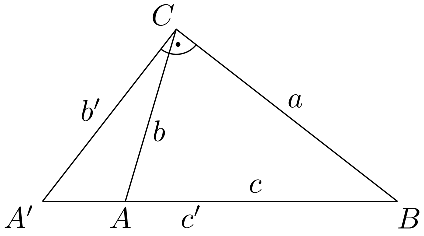
$$a + b \; > \; c + \frac{2}{3}\, m\,.$$

Első megoldás: Tegyük föl először, hogy a háromszög C-nél derékszögű. A bizonyítandó, pozitív számokra fölírt egyenlőtlenséget elég a két oldal négyzetére belátni. A Pitagorasz-tételből, illetve a háromszög területképleteiből nyert $a^2+b^2=c^2$ és $ab=mc$ egyenlőségeket használva (1 pont)
egyenértékű átalakításokkal az egyenlőtlenség

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &> c^2+\frac{4}{3}mc+\frac{4}{9}m^2 \\ \frac{2}{3}mc &> \frac{4}{9}m^2 \\ c &> \frac{2}{3}m \end{aligned}$$

alakra hozható. Ez nyilvánvalóan teljesül bármely derékszögű háromszögben, hiszen az átfogóhoz tartozó magasság legfeljebb az átfogó fele. (2 pont)

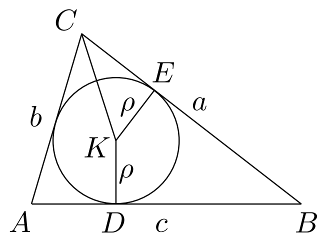
Ha a C-nél levő szög hegyesszög, és például $a \geq b$, akkor a BC oldalra C-ben állított merőleges az AB oldal A felőli meghosszabbítását metszi, legyen a metszéspont A'. (1 pont)



Az ilyen módon kapott $A'BC$ derékszögű háromszög a, b' és c' oldalaira a fentiek szerint $a+b'>c'+(2/3)m$ érvényes. Az $A'AC$ háromszögben $(c'-c)+b>b'$, vagyis $b-b'>c-c'$. Így ezekből

$$a+b=a+b'+(b-b')>c'+\frac{2}{3}m+(b-b')>c'+\frac{2}{3}m+(c-c')=c+\frac{2}{3}m\,. \quad \text{(3 pont)}$$

Második megoldás: Legyen a háromszög beírt körének a középpontja K, sugara ρ, és érintse a kör az AB oldalt a D pontban, a BC oldalt az E pontban.



A beírt körhöz C-ből húzott érintőszakasz hossza $CE=(a+b-c)/2$. (1 pont)
A $CEKD$ töröttvonal hossza nagyobb a CD távolságnál, ami pedig legalább akkora, mint az m magasság. Ezért

$$\frac{a+b-c}{2}+2\rho > m\,. \quad \text{(3 pont)}$$

A KEC derékszögű háromszög C-nél levő szöge legfeljebb $45°$-os, ezért a KE befogó nem lehet hosszabb a CE befogónál, vagyis $(a+b-c)/2 \geq \rho$. (1 pont)

Emiatt

$$3 \cdot \frac{a+b-c}{2} > m\,,$$

ahonnan átrendezéssel a bizonyítandó egyenlőtlenség következik. (2 pont)

Megjegyzés: A két megoldás bármelyikének kisebb módosításával belátható, hogy feladat állítása a $2/3$ konstans helyett annál nagyobb szorzóval is igaz: érvényes az $a+b \geq c + 2(\sqrt{2}-1)m$ egyenlőtlenség, és az egyenlő szárú derékszögű háromszög esetében éles.

3. feladat

Egy egyszerű gráfban csúcsok egy halmazát függetlennek nevezzük, ha semelyik két eleme között nem fut él. Jelölje $F(G)$ a G egyszerű gráf csúcsai közül kiválasztható független részhalmazok számát. Adott n mellett az n csúcsú összefüggő gráfok közül melyikre lesz $F(G)$ maximális?

Első megoldás: Belátjuk, hogy ez a csillaggráf: az, ahol egyetlen $(n-1)$-edfokú, „központi” csúcs van összekötve az összes többivel, és nincs más él. (1 pont)
Ha $n=1$, akkor ez magától értetődő, hiszen az egyetlen 1 csúcsú gráf a(z elfajuló) csillag. A továbbiakban tegyük föl, hogy $n>1$.

Legyen egy n csúcsú összefüggő G gráf csúcshalmaza V, az ebből kiválasztható (egyik) tartalmazásra nézve maximális független részhalmaz A, ennek komplementere $B = V - A$. Ezek egyike sem lehet üres. Egyrészt ugyanis az egyelemű részhalmazok függetlenek, és A maximális, másrészt pedig ha $A=V$ lenne, akkor G-ben egyáltalán nem lehetne él, és így nem lenne összefüggő. E két halmaz elemszámát jelölje rendre $a=|A|>0$ és $b=|B|>0$.

Szeretnénk most ennek segítségével fölső becslést adni $F(G)$ értékére. Be fogjuk látni, hogy ha a becslésben egyenlőség áll fönn, akkor $a=1$ vagy $a=n-1$, és G csillag, melynek középpontja az A vagy a B egyetlen eleme. (1 pont)

Számoljuk tehát össze a független halmazokat. Legyen $H \subseteq V$ független G-ben, és bontsuk kétfelé az $X = H \cap A$ és $Y = H \cap B$ halmazokra. Az X-től függően 3 esetet különböztetünk meg.

Ha $X=\emptyset$, akkor $H = Y \subseteq B$ összesen legföljebb 2^b-féle lehet. (Ezek persze nem feltétlenül lesznek mind függetlenek.)

Ha $X=A$, akkor $H \supseteq A$ függetlensége és A maximalitása miatt $H=A$. (1 pont)

Végül ha $\emptyset \neq X \subsetneq A$, akkor vegyünk egy X és B között futó xz élt, ahol $x \in X$ és $z \in B$. Ilyen létezik, mert A függetlensége okán X-ből nem megy él A-n belülre, de G összefüggő, így valamelyik B-beli csúcsba kell, hogy vezessen él. (Sőt, tetszőleges $x \in X$ csúcshoz található alkalmas z.) A kapott z nem lehet benne Y-ban, így rögzített X mellett $Y \subseteq B - \{z\}$ összesen legföljebb 2^{b-1}-féle lehet. Ha azonban több ilyen z csúcs is választható, akkor ezek egyike sem lehet Y eleme, vagyis ekkor az Y halmaz legföljebb 2^{b-2}-féle. (2 pont)

Most adjuk össze az egyes esetekben kapott becsléseket. A harmadik esetben az X összesen (2^a-2)-féle lehet, így a független $H \subseteq V$ halmazok számára

$$F(G) \leq 2^b + 1 + (2^a-2)\cdot 2^{b-1} = 2^{a+b-1}+1 = 2^{n-1}+1$$

teljesül. Egyenlőséget csak akkor kaphatunk, ha a becslés mindhárom esetben éles volt.

Az $X = \emptyset$ esetben ez azt jelenti, hogy B minden részhalmaza, speciálisan B is független (ami egyben biztosítja az összes részhalmaz függetlenségét is).

Ha $X = A$, akkor az egyenlőség automatikus, hiszen A-ról eleve föltettük, hogy független.

Végül az $\emptyset \neq X \subsetneq A$ esetben arra van szükségünk, hogy X minden választása mellett X-ből a B-nek csupán egyetlen pontjába vezessen él. Ez azt jelenti, hogy vagy $|A| = 1$, és nincs ilyen X, vagy speciálisan A minden pontja elsőfokú (hiszen minden belőlük kimenő él B-be vezet).

Ha $a = 1$, akkor a B függetlenségével együtt kapjuk, hogy G csillag: mivel G összefüggő, A egyetlen eleméből B minden csúcsába megy él.

Ha viszont A minden pontja elsőfokú, akkor a B függetlensége és G összefüggősége azt adja, hogy a belőlük induló élek másik végpontja mind megegyezik, hiszen különben nem vezetne út A pontjai között. B pedig csak egyelemű lehet, mert különben az A-val össze nem kötött elemeinek a foka 0 lenne. Így ezúttal B egyetlen eleme lesz a csillag közepe.

Mindkét esetben valóban teljesül is mindenhol az élesség, és A maximális független részhalmaz. Tehát a csillaggráfra, és csakis arra lesz F értéke a maximális $2^{n-1} + 1$.

(2 pont)

Második megoldás: Be fogjuk látni, hogy a keresett gráf csillag. (1 pont)

Észrevehetjük, hogy a maximumot csak akkor kaphatjuk, ha G fa. Ha ugyanis nem az, akkor G tartalmaz kört, és ennek egy xy élét elhagyva a kapott G' gráf továbbra is összefüggő marad. Ha csúcsok egy halmaza független volt G-ben, akkor G'-ben is az lesz, ellenben az $\{x, y\}$ halmaz csak az utóbbiban független. Tehát $F(G') > F(G)$, azaz G-nél a független halmazok száma nem maximális. (1 pont)

Most n-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy a maximum – melyet jelöljünk $M(n)$-nel – kizárólag a csillag esetén vétetik föl.

Az $n = 1$ eset magától értetődő, hiszen csak egyetlen 1 csúcsú gráf van, és az a(z „elfajuló") csillag. (Erre $M(1) = 2$ darab független csúcshalmazt kapunk.)

Legyen $n > 1$, és tegyük föl, hogy már tudjuk: az $n-1$ csúcsú összefüggő gráfok közül csakis a csillag esetén kapjuk meg a maximumot. Legyen továbbá G egy n csúcsú fa, csúcshalmazát jelöljük V-vel. Mivel G fa, van levele (elsőfokú csúcsa): legyen ez x. Az x elhagyásával kapott gráfot jelölje G', ennek csúcshalmazát $V' = V - \{x\}$, x egyetlen G-beli szomszédját y. (A G' gráf is fa, mivel levelet hagytunk el.) (1 pont)

Határozzuk most meg a V-ből kiválasztható, G-ben független részhalmazokat. Ha $H \subseteq V$ független G-ben, akkor két esetet különböztethetünk meg: vagy benne van y, vagy nem. Ha $y \in H$, akkor $x \notin H$, és H független G'-ben is. Ha $y \notin H$, akkor $H' = H - \{x\} \subset V'$ független G'-ben. A H tehát vagy egy G'-ben független, y-t tartalmazó részhalmaza V'-nek, vagy pedig egy G'-ben független, y-t nem tartalmazó $H' \subset V'$ halmaz esetlegesen kiegészítve az x ponttal.

Könnyű látni, hogy az ilyen halmazok mind függetlenek is lesznek G-ben: a V'-be eső részük független G'-ben, az egyetlen G'-höz nem tartozó él, xy két végpontja pedig sosem szerepel bennük egyszerre.

Ezeket a halmazokat összeszámolandó, jelölje tehát $F_y(G')$ a G' gráf csúcsai közül kiválasztható, y-t tartalmazó független halmazok számát. Ekkor a föntiek szerint

$$F(G) = F_y(G') + 2 \cdot \big(F(G') - F_y(G')\big) = 2F(G') - F_y(G'). \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel az $\{y\}$ halmaz mindenképpen független G'-ben, $F_y(G') \geq 1$ teljesül, vagyis (az $M(n)$ definícióját alkalmazva)

$$F(G) \leq 2F(G') - 1 \leq 2M(n-1) - 1,$$

és az első egyenlőtlenségnél egyenlőség csakis akkor áll, ha G'-ben az $\{y\}$ az egyetlen y-t tartalmazó független halmaz. Másképp mondva, ha ehhez új, V'-beli csúcsot hozzávéve már elromlik a függetlenség: a csúcs és y között él fut. Mivel G' fa, ezért csillag, melynek központi csúcsa az y. Ekkor az indukciós föltevés szerint a második egyenlőtlenségnél is egyenlőség áll, másrészt G maga is y-központú csillag. (1 pont)

Azt kaptuk tehát, hogy minden n pontú G fa esetén $F(G) \leq 2M(n-1) - 1$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha G csillag. A nem fa összefüggő esetben, mint már mondtuk, $F(G)$ értéke szigorúan fölülről becsülhető egy alkalmas fa esetén kapottal (egyesével elhagyva G-ből körök részét képező éleket, amíg fához nem jutunk), tehát

$$M(n) = 2M(n-1) - 1,$$

és $F(G) = M(n)$ pontosan akkor teljesül az n pontú, összefüggő G gráfra, ha G csillag. (1 pont)

Megjegyzés: Az $M(1) = 1$, $M(n) = 2M(n) - 1$ lineáris rekurzióból (például teljes indukcióval) kaphatjuk, hogy

$$M(n) = 2^{n-1} + 1.$$

Persze ugyanezt megkaphatnánk úgy is, hogy egyszerűen összeszámoljuk a csillaggráf független részhalmazait: a központot tartalmazó egyelemű halmazon kívül tetszőleges, a maradék $n-1$ csúcs közül választott részhalmaz jó lesz, és ezzel az összeset meg is kaptuk. Ez szintén a fönti képletet adja vissza.

Harmadik megoldás: A második megoldás második bekezdéséhez hasonlóan megállapítjuk, hogy a maximumot adó gráf csak fa lehet. (1 pont)

Azt állítjuk, hogy a keresett gráf csillag. Ezt elég $n > 1$-re igazolni, ugyanis $n = 1$ esetén egyetlen egyszerű gráf van: a(z elfajuló) csillag. Jelölje a csillag középpontját y. Csúcsok egy részhalmaza pontosan akkor független, ha nem tartalmazza y-t, vagy ha csak y-t tartalmazza. Az ilyen részhalmazok száma $2^{n-1} + 1$. (2 pont)

Belátjuk, hogy ha G-re $F(G)$ maximális, akkor G-ben nincsen 3 élből álló út. (1 pont)

Tegyük föl ugyanis, hogy $abcd$ egy ilyen út, ekkor egy független halmaz $\{a, b, c, d\}$-vel vett metszete csak $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}$ lehet, ez 8 lehetőség. Ezek mindegyike 2^{n-4}-féleképpen egészíthető ki a csúcsok egy részhalmazává, így $F(G) \leq$ $\leq 8 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-1}$, tehát ilyenkor $F(G)$ biztosan kisebb, mint a csillag esetében. (2 pont)

Tehát ha $F(G)$ maximális, akkor G olyan fa, amelyben nincs 3 élű út. Legyen x a G egy elsőfokú csúcsa, és y ennek egyetlen szomszédja. Az y csúcs többi szomszédja is elsőfokú, ha ugyanis egy z szomszédjából y mellett egy u csúcsba is futna él, akkor $xyzu$ 3 hosszúságú út lenne. Tehát G egy y középpontú csillag. (1 pont)

4. feladat

Egy valós számokból álló n elemű halmaz minden részhalmazára kiszámoltuk az elemek összegét. Legalább hányféle számot kaptunk? (Az üres halmaz elemeinek összegét 0-nak tekintjük.)

Első megoldás: Tekintsük először a halmaz pozitív elemeit, ezek legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Ekkor

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k < a_1 + a_k < a_2 + a_k < \ldots < a_{k-1} + a_k < \\ < a_1 + a_{k-1} + a_k < \ldots < a_{k-2} + a_{k-1} + a_k < \ldots < a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

különböző pozitív összegek, számuk $\frac{k(k+1)}{2}$. (Itt először az egytagú összegek szerepelnek nagyságsorrendben, majd az a_k-t tartalmazó kéttagúak, majd az a_{k-1}-et és a_k-t is tartalmazó háromtagú összegek, és így tovább.) (3 pont)

Ehhez hasonlóan, ha ℓ darab negatív elem van, akkor kapunk legalább $\frac{\ell(\ell+1)}{2}$ negatív összeget.

Az üres összeg 0-t ad, így a különböző összegek száma legalább

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel $k + \ell \geq n - 1$ (valójában $k + \ell = n$, ha a 0 nem szerepel a halmazban és $k + \ell = n - 1$, ha szerepel), ezért

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1 = \frac{(k+\ell)^2 + (k-\ell)^2 + 2(k+\ell) + 4}{4}$$

akkor a lehető legkisebb, ha $k + \ell = n - 1$ és $|k - \ell|$ a lehető legkisebb.

Tehát páratlan n esetén a különböző összegek számára kapott alsó becslésünk a $k = \ell = \frac{n-1}{2}$ esetén kapott $\frac{(n-1)^2+0+2(n-1)+4}{4} = \frac{n^2+3}{4}$, míg páros n esetén a $\{k, \ell\} = \left\{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\right\}$ esetén kapott $\frac{(n-1)^2+1+2(n-1)+4}{4} = \frac{n^2}{4} + 1$. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy a megadott érték mindkét esetben el is érhető. Ha n páratlan, akkor $k = \frac{n-1}{2}$ mellett a $\{-k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmaz részhalmazaira vett összegek a $\left[-\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right]$ intervallumba eső egész számok, melyek száma éppen a fent megadott alsó becslésünk: $k^2 + k + 1 = \frac{n^2+3}{4}$.

Ha n páros, akkor pedig $k = \frac{n}{2} - 1$ választás mellett a $\{-(k+1), -k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmaz részhalmazaira vett összegek a $\left[-\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right]$ intervallumba eső egész számok, melyek száma éppen a fent megadott alsó becslésünk: $\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + 1 = \frac{n^2}{4} + 1$.

Tehát az előálló különböző összegek lehetséges legkisebb száma:

$$\begin{cases} \dfrac{n^2+3}{4}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\[2ex] \dfrac{n^2}{4} + 1, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \qquad \text{(2 pont)}$$

Második megoldás: A részhalmazösszegek keresett minimális számát, $S(n)$-et n szerinti teljes indukcióval határozzuk meg.

Az $S(n)$ sorozat nyilván nemcsökkenő. Megmutatjuk, hogy $S(n) > S(n-1)$ is teljesül $n \geq 2$ esetén. Ha $n \geq 2$, akkor bármely, a minimális számú összeget megvalósító n elemű halmaznak van 0-tól különböző eleme, amelyről (ha kell, a számok ellentettjeire áttérve) feltehetjük, hogy pozitív. A legnagyobb pozitív elem elhagyásával biztosan elvész az az összeg, amely az összes pozitív elemből áll, vagyis a maradék halmazban legfeljebb $(S(n)-1)$-féle részhalmazösszeg fordulhat elő. Az összegek minimális száma, $S(n-1)$, ennél nem lehet nagyobb, így valóban $S(n) \geq S(n-1)+1$. (1 pont)

A sorozat szigorúan növekedő voltából az is következik, hogy $n \geq 1$ esetén a minimális számú összeget megvalósító n elemű halmazokban szerepelnie kell a 0 számnak. Ha nem így lenne, a 0 hozzávételével létrejönne egy $n+1$ elemű halmaz $S(n)$-féle összeggel, ami ellentmondana annak, hogy $S(n) < S(n+1)$. (1 pont)

Legyen $n \geq 2$, és legyen valamely, a minimális számú összeget megvalósító n elemű halmazban a 0-n kívül k darab pozitív szám és ℓ darab negatív. (Itt $n = k + \ell + 1$ és legalább az egyik előjel mindenképpen előfordul.)

Megmutatjuk, hogy a számhalmazból a legnagyobb pozitív elemének, p-nek az elhagyásával legalább k darab összeg elvész, vagyis ezek a maradék halmazból képzett mindegyik összegnél nagyobbak. Az összes, k darab pozitív elem összege nyilván ilyen. Továbbá $k > 1$ esetén újabb $k-1$ elvesző összeghez jutunk, ha a legnagyobb megmaradó összegben (az összes megmaradó $k-1$ pozitív elem összegében) a tagok egyikét rendre lecseréljük p-re.

A legkisebb negatív szám elhagyásával ugyanígy legalább ℓ darab összeg elvész (mert ezek minden megmaradó összegnél kisebbek).

Ezért $S(n) \geq S(n-1) + \max\{k, \ell\}$. Itt $k + \ell = n - 1$ miatt $\max\{k, \ell\} \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, tehát

$$S(n) \geq S(n-1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor . \qquad \text{(2 pont)}$$

Tudjuk, hogy $S(0)$ és $S(1) = 1 + 0 = 1$. Az $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ növekményeket hozzáadogatva alsó becslést kapunk $S(n)$ értékére:

$$\begin{aligned}
S(2) &\geq 1+0+1 = 2, \\
S(3) &\geq 1+0+1+1 = 3, \\
S(4) &\geq 1+0+1+1+2 = 5, \\
S(5) &\geq 1+0+1+1+2+2 = 7,
\end{aligned}$$

és így tovább:

$$\begin{aligned}
\text{páratlan } n\text{-re} \quad S(n) &\geq 1 + 2\left(1+2+\ldots+\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2+3}{4}, \\
\text{páros } n\text{-re} \quad S(n) &\geq 1 + 2\left(1+2+\ldots+\frac{n-2}{2}\right) + \frac{n}{2} = \frac{n^2+4}{4}. \qquad \text{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Ezt az alsó korlátot meg is valósítják az alábbi halmazok:

páratlan elemszámmal: $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$,
páros elemszámmal: $\{-k+1, -k+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$. (2 pont)

5. feladat

Határozzuk meg azokat az $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x\neq y$ valós szám esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Első megoldás: Tetszőleges a,b,c valós számok esetén az $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=$ $=2ax+b$ függvénypárra teljesül a feladatban szereplő függvényegyenlet, ugyanis

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{x-y} = 2a\,\frac{x+y}{2}+b = g\left(\frac{x+y}{2}\right). \qquad \text{(1 pont)}$$

Az alábbiakban belátjuk, hogy a szóban forgó függvényegyenletet csak az előbbi alakú függvénypárok elégítik ki.

A függvényegyenlet mindkét oldalát az $(x-y)$ kifejezéssel megszorozva az

$$f(x)-f(y) = (x-y)\,g\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (*)$$

egyenletet kapjuk, amely már az $x=y$ esetben is teljesül. Ebből $y=0$ választással $f(x)-f(0)=xg\left(\frac{x}{2}\right)$ adódik, azaz

$$f(x) = xg\left(\frac{x}{2}\right)+f(0). \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezt az összefüggést a $(*)$ egyenletbe visszahelyettesítve a g függvényre az alábbi függvényegyenletet nyerjük:

$$xg\left(\frac{x}{2}\right)-y\,g\left(\frac{y}{2}\right) = (x-y)\,g\left(\frac{x+y}{2}\right). \qquad \text{(1 pont)}$$

Megmutatjuk, hogy ebből $g\left(\frac{x}{2}\right)=ax+g(0)$ következik. Ekkor készen leszünk, hiszen $g(x)=2ax+g(0)$ és $f(x)=xg\left(\frac{x}{2}\right)+f(0)=ax^2+g(0)x+f(0)$, így $b=g(0)$ és $c=f(0)$ jelölésekkel az eredeti függvényegyenlet kívánt alakú megoldáspárjait nyerjük.

(1 pont)

A $G(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)-g(0)$ függvényt bevezetve, a $g\left(\frac{x}{2}\right)=G(x)+g(0)$ összefüggés alapján a g függvényre vonatkozó függvényegyenlet a G-re nézve a következő alakot ölti:

$$xG(x)-yG(y) = (x-y)G(x+y). \qquad (**)$$

(1 pont)

Ebből $x=-y$ helyettesítéssel $G(0)=0$ alapján $-yG(-y)-yG(y)=0$ adódik, aminek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$xG(x)+yG(-y) = (x-y)\,G(x+y).$$

Itt y helyett $(-y)$-t írva:

$$xG(x)-yG(y) = (x+y)\,G(x-y).$$

Ezt a $(**)$ egyenlettel összevetve:

$$(x-y)\,G(x+y) \;=\; (x+y)\,G(x-y).$$

Innen $y=x-1$ választással $G(2x-1)=(2x-1)G(1)$, így végül az $a=G(1)$ jelöléssel $G(x)=ax$, tehát $g\left(\frac{x}{2}\right)=ax+g(0)$. (2 pont)

Második megoldás: Megmutatjuk, hogy a függvényegyenletet pontosan az $f(x)= = ax^2+bx+c$, $g(x)=2ax+b$ alakú függvényekből álló párok teljesítik, ahol a, b, c tetszőlegesen választható valós számok. Először azt tisztázzuk, hogy g-nek legfeljebb elsőfokú polinomnak (azaz lineáris függvénynek) kell lennie.

Bármely $x\neq 0,1$ esetén

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=g(0) \qquad \text{és} \qquad \frac{f(2-x)-f(x)}{2-2x}=g(1)\,.$$

A nevezőkkel való szorzás után összeadva kapjuk, hogy

$$f(2-x)-f(-x)=2x\,g(0)+2(1-x)\,g(1)\,.$$

A bal oldalt a függvényegyenlet alapján átírva, majd 2-vel egyszerűsítve kapjuk, hogy minden $x\neq 0,1$ esetén

$$g(1-x)=x\,g(0)+(1-x)\,g(1)\,, \qquad \text{(3 pont)}$$

ami $x=0$ vagy 1 esetén is igaz.

Helyettesítsünk x helyébe $(1-x)$-et, ezzel a

$$g(x)=(1-x)\,g(0)+x\,g(1)=\big(g(1)-g(0)\big)\,x+g(0)$$

képletet kapjuk, amiből következik, hogy g valóban lineáris függvény. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $g(x)=2ax+b$ lineáris függvényhez lehet találni a feladatnak megfelelő f-et. A függvényegyenlet alapján $x\neq 0$-ra

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=g\left(\frac{x}{2}\right)=ax+b.$$

Átrendezve $f(x)=ax^2+bx+f(0)$, azaz $c=f(0)$ jelöléssel $f(x)=ax^2+bx+c$, és ez $x=0$ esetén is helyes. (2 pont)

Az f függvény csak ilyen alakú lehet, és ez teljesíti is a feltételt, hiszen ekkor

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{x-y}=a(x+y)+b=2a\,\frac{x+y}{2}+b=g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(1 pont)