



OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA  
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

**1. feladat**

Az  $ABC$  háromszög beírt köre érintse a  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalt rendre az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontban. Az  $A_1B_1C_1$  háromszög  $A_1$ -ből,  $B_1$ -ből,  $C_1$ -ből induló magasságának talppontja a szemközti oldalegyenesen legyen rendre  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  egyenesek egy ponton haladnak át.

**2. feladat**

Melyek azok az egész együtthatós polinomok, amelyekre teljesül, hogy bármely  $p$  prímszám esetén az egészen vett helyettesítési értékek között  $p$ -vel osztva minden lehetséges maradék előfordul?

**3. feladat**

Legyen  $F_0, F_1, \dots$  a Fibonacci-sorozat, amelyet az  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  kezdőértékekkel és  $i \geq 2$ -re az  $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$  rekurzióval definiálunk. Tekintsük azt a legfeljebb 2020-adfokú  $p$  polinomot, amelyre

$$p(0) = F_0, p(1) = F_1, \dots, p(2020) = F_{2020}.$$

Határozzuk meg  $p(2021)$  értékét.