OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

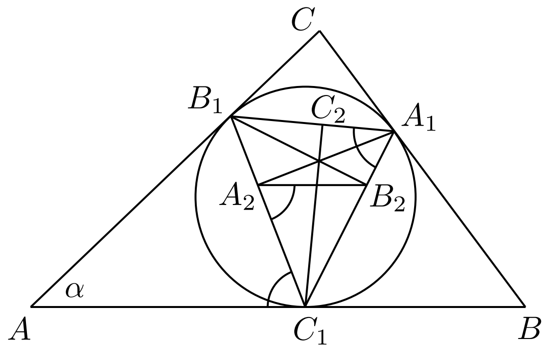
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

MEGOLDÁSOK

1. feladat

Az ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA, AB oldalt rendre az A_1, B_1, C_1 pontban. Az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1-ből, B_1-ből, C_1-ből induló magasságának talppontja a szemközti oldalegyenesen legyen rendre A_2, B_2, C_2. Bizonyítsuk be, hogy az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek egy ponton haladnak át.

Első megoldás: Legyen α az ABC háromszög A-nál levő szöge. Az ábrán megjelölt három szöget ki tudjuk fejezni α segítségével:



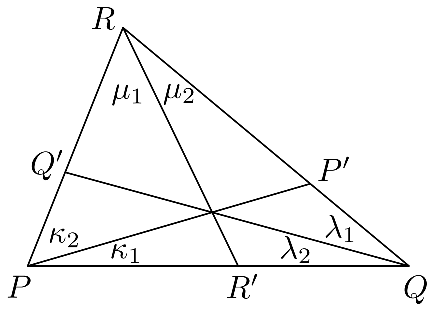
Az AC_1B_1 háromszögben $AC_1 = AB_1$, ezért $AC_1B_1\sphericalangle = (180° - \alpha)/2$. A beírt körben az A_1-nél és C_1-nél megjelölt szögek ugyanahhoz a B_1C_1 ívhez tartozó kerületi szögek, ezért $C_1A_1B_1\sphericalangle = (180° - \alpha)/2$. Ez a szög hegyesszög, és ugyanígy belátható, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög többi szöge is hegyesszög. Ezért A_2, B_2 és C_2 belső pontok az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalain. Mivel A_2 és B_2 illeszkedik az A_1B_1 átmérőjű Thalész-körre, az $A_1B_1A_2B_2$ négyszög húrnégyszög, így $B_1A_2B_2\sphericalangle = 180° - B_2A_1B_1\sphericalangle$, és ezért $B_2A_2C_1\sphericalangle = (180° - \alpha)/2$.

A megjelölt szögek tehát egyenlők, amiből következik, hogy A_2B_2 párhuzamos AB-vel. Ugyanilyen módon kapjuk, hogy B_2C_2 és BC, valamint C_2A_2 és CA is párhuzamosak.

Az $A_2B_2C_2$ háromszög és az ABC háromszög tehát párhuzamosan hasonló. Ez csak úgy lehet, hogy vagy egymás eltoltjai, vagy pedig középpontosan hasonlók. Az eltolás esete nem lehetséges, hiszen az egyik háromszög a másikat a belsejében tartalmazza. Tehát AA_2, BB_2 és CC_2 a hasonlóság középpontjában metszik egymást.

Második megoldás: Felhasználjuk egyrészt Ceva tételét, amely szerint egy PQR háromszögben a PP', QQ' és RR' transzverzálisok (vagyis a csúcsokat a szemközti oldal valamely belső pontjával összekötő szakaszok) akkor és csak akkor haladnak át egy közös ponton, ha

$$\frac{PR'}{R'Q} \cdot \frac{QP'}{P'R} \cdot \frac{RQ'}{Q'P} = 1,$$



másrészt ugyanennek a tételnek a trigonometrikus változatát, amely szerint a három transzverzálisnak akkor és csak akkor van közös pontja, ha az ábra szerinti szögekre

$$\frac{\sin\kappa_1}{\sin\kappa_2}\cdot\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}\cdot\frac{\sin\mu_1}{\sin\mu_2} = 1$$

teljesül.

Ha belátjuk, hogy a feladatbeli pontokra

$$\frac{\sin C_1AA_2\sphericalangle}{\sin A_2AB_1\sphericalangle}\cdot\frac{\sin A_1BB_2\sphericalangle}{\sin B_2BC_1\sphericalangle}\cdot\frac{\sin B_1CC_2\sphericalangle}{\sin C_2CA_1\sphericalangle} = 1$$

érvényes, akkor a Ceva-tétel trigonometrikus változatából következik a bizonyítandó állítás.

Ennek a háromtényezős szorzatnak a tényezőit az AC_1A_2 és az AA_2B_1 háromszögekre felírt szinusztételek segítségével távolságarányokká alakíthatjuk. Az első tényező esetében például, kihasználva, hogy az AC_1B_1 háromszög egyenlő szárú,

$$\frac{\sin C_1AA_2\sphericalangle}{\sin A_2AB_1\sphericalangle} = \frac{\sin C_1AA_2\sphericalangle}{\sin A_2C_1A\sphericalangle}\cdot\frac{\sin AB_1A_2\sphericalangle}{\sin A_2AB_1\sphericalangle} = \frac{C_1A_2}{A_2A}\cdot\frac{AA_2}{A_2B_1} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1}.$$

A másik két tényező esetében is ugyanígy eljárva a feladat állítását visszavezettük a

$$\frac{C_1A_2}{A_2B_1}\cdot\frac{A_1B_2}{B_2C_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_2A_1} = 1$$

egyenlőségre. Ez utóbbi valóban igaz, mert az $A_1B_1C_1$ háromszögben a három magasságvonalra alkalmazhatjuk a Ceva-tételt.

Megjegyzés: A második megoldásból látszik, hogy ahelyett, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok a magasságok talppontjai, elég annyit föltenni, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton haladnak át, hiszen a Ceva-tétel alkalmazása ekkor is a megoldást adja. Ugyanilyen jellegű általánosítást az A_1, B_1, C_1 pontok származtatásánál is tehetünk. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy ponton haladnak át (mégpedig az ABC háromszög ún. Gergonne-féle pontján). A feladatban a beírt kör használata helyett az A_1, B_1, C_1 pontokról is elegendő annyit föltenni, hogy AA_1, BB_1, CC_1 egy ponton haladnak át. A Ceva-tétel kétszeri alkalmazása (a második megoldás csekély módosításával) ilyenkor is ugyanarra az eredményre vezet.

2. feladat

Melyek azok az egész együtthatós polinomok, amelyekre teljesül, hogy bármely p prímszám esetén az egészeken vett helyettesítési értékek között p-vel osztva minden lehetséges maradék előfordul?

Első megoldás: Legyen $f(x)$ tetszőleges egész együtthatós polinom. Tudjuk, hogy bármilyen $a \neq b$ egészek és m nemnegatív egész kitevő esetén $a-b$ osztója az $a^m - b^m$ számnak. Az $f(x)$ polinom tagjaira ezt alkalmazva kapjuk, hogy bármely p prímszámra és k egészre $p \mid f(k+p) - f(k)$ teljesül. Az $f(x)$ egészeken felvett helyettesítési értékeinek p szerinti maradékai tehát periodikusan ismétlődnek p periódussal.

Emiatt ha a feladat feltételei szerint a helyettesítési értékek minden maradékot előállítanak, akkor az $f(k)$, $f(k+1)$, …, $f(k+p-1)$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo p. Ez nyilván lehetetlen, ha például $p \mid f(k+1) - f(k)$. Viszont ez a helyzet áll elő, ha létezik olyan k egész, hogy $|f(k+1) - f(k)| \geq 2$, ilyenkor ugyanis p-nek választhatjuk ennek a számnak egy prímosztóját.

Ezzel tehát ellentmondást kaptunk, ha található két olyan szomszédos egész szám, amelyeken az $f(x)$ polinom helyettesítési értékei legalább 2-vel térnek el egymástól. Ez csak akkor nincs így, ha a $g(x) = f(x+1) - f(x)$ polinom az egészek halmazán a -1, 0 és 1 számokon kívül nem vesz fel más értéket. Ekkor viszont $g(x)$ csak konstans polinom lehet. A három lehetséges érték közül a 0 nem jön szóba, mert akkor $f(x)$ is konstans volna.

Ha az $f(x)$ polinom n-edfokú és főegyütthatója a_n, akkor $g(x)$-ben nyilván csak legfeljebb $(n-1)$-edfokú tagok fordulhatnak elő, és az $(n-1)$-edfokú tag együtthatója na_n. A $g(x)$ polinom tehát pontosan eggyel alacsonyabb fokú, mint $f(x)$, vagyis esetünkben $f(x)$ elsőfokú. Ezért csak $f(x) = x+a$ vagy $f(x) = -x+b$ lehetséges, ahol a, b egészek. Ezek nyilván meg is felelnek a feladat követelményeinek.

Második megoldás: Ha egy a feladat kívánalmainak eleget tevő egész együtthatós $f(x)$ polinomhoz egy egész számot hozzáadunk, annak az egészek halmazán vett értékkészlete nem változik meg semmilyen modulusra nézve. Ezért feltehető, hogy a feladat feltételeinek megfelelő $f(x)$ polinomnak gyöke a nulla. Írjuk föl $f(x) = x^k g(x)$ alakban, ahol $k \geq 1$, a $g(x)$ polinom is egész együtthatós, és $g(x)$-nek a d konstans tagja már nem nulla. Azt kell belátnunk, hogy $g(x)$ konstans, d értéke 1 vagy -1 és $k = 1$.

Tegyük föl, hogy a $g(md+1)$ számnak van egy p prímosztója alkalmas m egészre. Ekkor $p \mid f(md+1)$ és $p \mid f(0) = 0$. A feltételünk szerint $f(x)$ minden értéket felvesz modulo p, ezért a nullát nem veheti fel két olyan helyen, amelyek inkongruensek modulo p. Ezért $p \mid md+1$. De akkor a $g(md+1)$ szám d maradékot ad modulo p, hiszen d a $g(x)$ konstans tagja. Ezért $p \mid d$, hiszen p és m választása alapján $p \mid g(md+1)$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $p \mid md+1$.

Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy a $g(dx+1)$ polinom csak 1 vagy -1 értéket vehet föl minden egész x helyen. De $g(x)$, ha nem konstans, akkor csak véges sok helyen vehet föl 1-et is és -1-et is. Ezért $g(x)$ konstans, és értéke 1 vagy -1. Így $f(x) = \pm x^k$.

Ha $k > 1$, akkor $2^k - 1 > 1$, ezért van egy p prímosztója. Ekkor $f(2) - f(1) = \pm(2^k - 1)$ miatt $f(1)$ és $f(2)$ kongruens modulo p, ami lehetetlen.

3. feladat

Legyen $F_0, F_1, \ldots$ a Fibonacci-sorozat, amelyet az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ kezdőértékekkel és $i \geq 2$-re az $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ rekurzióval definiálunk. Tekintsük azt a legfeljebb 2020-adfokú p polinomot, amelyre

$$p(0) = F_0,\ p(1) = F_1,\ \ldots,\ p(2020) = F_{2020}\,.$$

Határozzuk meg $p(2021)$ értékét.

Első megoldás: Először is jegyezzük meg, hogy ha $q \not\equiv 0$ egy n-edfokú polinom, akkor $q(x+1) - q(x)$ egy $(n-1)$-edfokú polinom. Ugyanis, ha $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + {} + \ldots + a_1 x + a_0$, akkor

$$q(x+1) - q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\big((x+1)^i - x^i\big) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} x^j,$$

ahol a legmagasabb fokú tag $(n-1)$-edfokú (csak $i = n$ és $j = n-1$ mellett kapunk ilyen magas fokú tagot), melynek együtthatója na_n.

Terjesszük ki a Fibonacci-sorozatot negatív indexekre is úgy, hogy az $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ rekurzió minden egész i-re teljesüljön. Ehhez $F_0 = 0, F_1 = 1$ kezdőértékek mellett az $F_{i-2} = F_i - F_{i-1}$ rekurzióval megadott sorozatot kell vennünk. Indukcióval rögtön látható, hogy $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$ adódik.

Tekintsük most a feladatban szereplő $p = p_{2020}$ polinom mellett a

$$p(0) = F_0,\ p(1) = F_1,\ p(2) = F_2, \ldots,\ p(2020) = F_{2020},\ p(2021)$$

sorozatot. Korábbi észrevételünk alapján ennek a különbségsorozata, vagyis

$$F_1 - F_0,\ F_2 - F_1,\ \ldots,\ F_{2020} - F_{2019},\ p(2021) - F_{2020}$$

egy p-nél pontosan 1-gyel kisebb fokú polinom által a $0, 1, \ldots, 2020$ helyeken felvett értékek sorozata. A Fibonacci-sorozat rekurziója alapján ez a sorozat az alábbi módon is írható:

$$F_{-1},\ F_0,\ \ldots,\ F_{2018},\ p(2021) - F_{2020}.$$

Most az újonnan kapott sorozat különbségsorozatát véve a

$$F_0 - F_{-1},\ F_1 - F_0,\ \ldots,\ F_{2018} - F_{2017},\ p(2021) - F_{2020} - F_{2018},$$

vagyis az

$$F_{-2},\ F_{-1},\ \ldots,\ F_{2016},\ p(2021) - F_{2020} - F_{2018}$$

sorozatot kapjuk. Ez a sorozat egy p-nél 2-vel kisebb fokú polinom által a $0, 1, \ldots, 2019$ helyeken felvett értékek sorozata.

Ugyanígy folytatva, mindig az előző sorozat különbségsorozatát véve további 2018 iteráció után a következő sorozatot kapjuk:

$$F_{-2020},\ p(2021) - F_{2020} - F_{2018} - \ldots - F_{-2018}.$$

Ez nem más, mint egy p-nél 2020-szal kisebb fokú polinom által a $0, 1$ helyeken felvett értékek sorozata. (Onnan látható, hogy eddig a különbségsorozatokat véve még nem jutottunk el az azonosan 0 polinomhoz, hogy $F_{-2020} \neq 0$. Így viszont a fentiek alapján mindig 1-gyel csökkent a fokszám.)

Mivel p foka legfeljebb 2020 volt, ezért ez csak egy konstans polinom lehet, következésképpen

$$F_{-2020} = p(2021) - F_{2020} - F_{2018} - \ldots - F_{-2018},$$

amiből

$$p(2021) = F_{-2020} + F_{-2018} + \ldots + F_{2018} + F_{2020}.$$

Mivel $F_{-2k} = -F_{2k}$ minden k egészre (beleértve a $k = 0$ esetet is: $F_0 = 0$), ezért $p(2021) = 0$.

Megjegyzés: A polinom-interpoláció alapján pontosan egy a feltételeknek megfelelő p polinom létezik, és a megoldásból az is kiderült, hogy ennek foka valójában *pontosan* 2020. Megfelelő p polinom létezését és egyértelműségét a megoldás során nem szükséges vizsgálni, hiszen a feladat szövege kikötötte, hogy p ilyen. Azt sem feltétlenül szükséges indokolni, hogy p foka pontosan 2020, hiszen kisebb fokú polinom esetén is igaz lenne az a megállapítás, hogy a 2020 lépés után kapott polinom konstans (ilyenkor 2020 lépés után a konstans 0 polinomot kapnánk).

Második megoldás: Legyen

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} F_i \binom{x}{i}, \quad \text{ahol} \quad \binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i\,!}.$$

Megmutatjuk, hogy ez a polinom megfelel a feltételeknek abban az értelemben, hogy $p_n(k) = F_k$ ha $0 \leq k \leq n$, továbbá azt is, hogy $p_n(n+1) = F_{n+1} - (-1)^n F_{n+1}$, vagyis $p_n(n+1)$ páros n esetén nulla, páratlan n esetén $2F_{n+1}$. Speciálisan a feladat esetében $p_{2020}(2021) = 0$.

Mindkét állítás nyilvánvalóan adódik a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} F_i \binom{n}{i} = F_n \tag{$*$}$$

azonosságból. Valóban, ha $0 \leq k \leq n$, akkor a $p_n(k)$-t definiáló összegben azok a tagok nullával egyenlők, amelyekre $i > k$, ezért a $(*)$ azonosságot n helyett k-ra alkalmazva F_k-t kapjuk eredményül. Továbbá $p_{n+1}(n+1) - p_n(n+1) = (-1)^n F_{n+1}$ a két polinom definíciója miatt. Már láttuk, hogy $p_{n+1}(n+1) = F_{n+1}$, ahonnan a második állításunkat kapjuk.

A $(*)$ azonosság egy binomiális együtthatókra vonatkozó összefüggésből következik. Legyen c_k az egészeken indexelt számsorozat és

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} c_{i+k} \binom{n}{i}.$$

Ekkor $S_{n+1,k} = S_{n,k} + S_{n,k+1}$ tetszőleges k egész és $n \geq 0$ esetén következik a Pascal-háromszög képzési szabályából, vagyis az

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \text{ összefüggésből, hiszen } \binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0.$$

Ahogy az előző megoldásban is, terjesszük ki a Fibonacci-számok rekurzióját negatív indexekre, nyilván $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$ adódik. Válasszuk a c_k számot $(-1)^{k-1} F_k$-nak. Nyilván $S_{0,k} = (-1)^{k-1} F_k = F_{-k}$. Ezért n szerinti indukcióval a most bizonyított rekurzióból azt kapjuk, hogy $S_{n,k} = F_{n-k}$. Beláttuk tehát, hogy $n \geq 0$ és tetszőleges k esetén

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+k-1} F_{i+k} \binom{n}{i} = F_{n-k}\,.$$

Ennek $k = 0$ esete a kívánt $(*)$ azonosság.