



OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Határozzuk meg az összes olyan prímszámot, amely előáll $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ alakban, ahol n pozitív egész számot jelöl.

(A feladat szövegében szereplő $[y]$ jelölés az y valós szám alsó egészrésze, ami az y -nál nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.)

2. feladat Határozzuk meg a következő egyenlet összes valós megoldását:

$$4^{\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)} - 2x = 0.$$

3. feladat A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq CB$, az AC oldal felezőpontja F . Legyen a B -ből induló magasságvonal talppontja az AC oldalon T , az A és C pontok merőleges vetülete a háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre P és Q .

(a) Bizonyítsuk be, hogy P , Q , F és T egy körön helyezkednek el.

(b) Legyen R az ABC köré írt kör sugara, r pedig a P , Q , F és T pontokat tartalmazó kör sugara. Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha $ABC\angle = 72^\circ$ és $R : r = 2 : 1$.

4. feladat Milyen m egész esetén van olyan irracionális x , amire

$$x^{12} + mx, \quad x^3 + 2x^2 \quad \text{és} \quad x^2 + x$$

mindegyike egész.