



OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a beírt kör középpontjának a súlyponttól mért távolsága kisebb, mint a háromszög leghosszabb oldalának a harmada.

2. feladat

Legyen a_0 tetszőleges egész szám és tekintsük az $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ ($n \geq 0$) rekurzióval definiált sorozatot. Mutassuk meg, hogy az a_1, a_2, \dots számoknak együttevén végtelen sok különböző prímosztója van.

3. feladat

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ olyan pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$

törtek értéke páronként különböző. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq \frac{n^3}{16}.$$

Értékeljük a becslések élességének megmutatását, illetve a becslések javítását (például a harmadik feladatban minél nagyobb c mellett cn^3 alsó becslés igazolása).

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM

 Nemzeti
Tehetség Program