OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\frac{x}{5}+\frac{5}{y}=\log_5(10z-x^2); \quad \frac{y}{5}+\frac{5}{z}=\log_5(10x-y^2); \quad \frac{z}{5}+\frac{5}{x}=\log_5(10y-z^2).$$

2. feladat Egy 100×100-as sakktábla néhány mezőjét hangyák foglalják el a következő szabályok szerint: (i) minden mezőn legfeljebb egy hangya állhat, a mező közepén; (ii) minden hangyához legfeljebb két hangya áll két egységnyinél közelebb; (iii) ha két hangya távolsága pont 2, akkor a köztük levő mező üres, azon nincs hangya. A hangyákat pontszerűnek tekintjük és mindhárom szabálynak teljesülnie kell.

a) Igazoljuk, hogy lehet a táblán 3400-nál több hangya.

b) Felállhat-e a táblára 3700-nál több hangya?

3. feladat Az ABCD húrnégyszög oldalainak hossza $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ és $DA=d$. Jelölje r_a annak a körnek a sugarát, amely az AB oldalt egy belső pontban kívülről érinti, továbbá érinti a BC és AD oldalegyeneseket is. Hasonlóképpen értelmezzük az r_b, r_c és r_d sugarú köröket. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}\geq\frac{8}{\sqrt[4]{abcd}}$$

Mindegyik feladat helyes megoldása 7 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program