OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (gimnázium)

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\frac{x}{5}+\frac{5}{y}=\log_5(10z-x^2); \quad \frac{y}{5}+\frac{5}{z}=\log_5(10x-y^2); \quad \frac{z}{5}+\frac{5}{x}=\log_5(10y-z^2).$$

Megoldás: A logaritmus értelmezése alapján az első egyenlet:

$$10z-x^2=5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}}. \qquad \text{1 pont}$$

Hasonlóan felírjuk a másik két egyenletet is, majd összeadva kapjuk:

$$10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)=5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}}+5^{\frac{y}{5}+\frac{5}{z}}+5^{\frac{z}{5}+\frac{5}{x}}. \qquad \text{1 pont}$$

A jobb oldalon három szám összege áll, alkalmazzuk ezekre a számtani és mértani középből adódó megfelelő egyenlőtlenséget:

$$5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}}+5^{\frac{y}{5}+\frac{5}{z}}+5^{\frac{z}{5}+\frac{5}{x}}\geq 3\cdot\left(5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}}\cdot 5^{\frac{y}{5}+\frac{5}{z}}\cdot 5^{\frac{z}{5}+\frac{5}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot\left(5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}+\frac{y}{5}+\frac{5}{z}+\frac{z}{5}+\frac{5}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad \text{1 pont}$$

Ismeretes, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, ezt felhasználva

$$3\cdot\left(5^{\frac{x}{5}+\frac{5}{y}+\frac{y}{5}+\frac{5}{z}+\frac{z}{5}+\frac{5}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\geq 3\cdot\left(5^{2+2+2}\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot 5^2=75. \qquad \text{1 pont}$$

A kapott egyenlőtlenséget 0-ra rendezve

$$0\geq 75+(x^2+y^2+z^2)-10(x+y+z)=(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel valós szám négyzete nemnegatív, ezért egyetlen megoldás lehet, az $x=y=z=5$. Az eredeti egyenletekbe visszahelyettesítve ellenőrizhetjük, hogy a kapott eredmény valóban jó.

1 pont

Összesen: 7 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

2. feladat Egy 100×100-as sakktábla néhány mezőjét hangyák foglalják el a következő szabályok szerint: (i) minden mezőn legfeljebb egy hangya állhat, a mező közepén; (ii) minden hangyához legfeljebb két hangya áll két egységnyinél közelebb; (iii) ha két hangya távolsága pont 2, akkor a köztük levő mező üres, azon nincs hangya. A hangyákat pontszerűnek tekintjük és mindhárom szabálynak teljesülnie kell.

a) Igazoljuk, hogy lehet a táblán 3400-nál több hangya.

b) Felállhat-e a táblára 3700-nál több hangya?

Megoldás: (a) Először mutatunk egy konstrukciót, amiben éppen 3400 hangya áll a feltételeknek megfelelően, majd azt módosítva megmutatjuk, hogy lehet több is. Vegyünk egy 3×3-as kis sakktáblát, számozzuk meg sorban a mezőit 1-től 9-ig az ábra szerint.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ezzel fedjük le a sakktáblát egyszeresen hézagmentesen, úgy, hogy az utolsó sorról és oszlopról lelóg a tábla, és számozzuk a mezőket a 3×3-as kis tábla szerint. Tekinthetjük úgy, hogy ha egy mező sorindexének és oszlopindexének hármas maradékaiból álló pár (i, j) ahol $i, j \in \{1, 2, 3\}$ akkor a mezőbe írjuk a $3(i-1)+j$ számot.

1	2	3	1	2	3	...	1
4	5	6	4	5	6	...	4
7	8	9	7	8	9	...	7
1	2	3	1	2	3	...	1
4	5	6	4	5	6	...	4
7	8	9	7	8	9	...	7
...	...	...	...	...	...	...	...
1	2	3	1	2	3	...	1

Könnyen látható, hogy ha mindig az 1,2,4 sorszámú mezőket választják a hangyák, akkor a feltételeknek megfelelő elrendezést kapunk. 1 pont

Valóban, a Pithagorasz-tétel alapján egy adott hangyától csak olyan hangyák lehetnek 2 egységnél közelebb, akik a mezővel csúcs vagy élszomszédosak.

Számoljuk meg az 1-es mezők számát a 100×100-as táblázatban: $33^2 + 2 \cdot 33 + 1$ mezőt kapunk, figyelembe véve az utolsó sort és oszlopot. Hasonlóképp, a 2,3,4,7-es mezők száma $33^2 + 33$, míg az 5,6,8,9-es mezők száma 33^2.

Eszerint, ha a hangyák az 1,2,4-es mezőket foglalják el, akkor a számuk

$$33^2 + 2 \cdot 33 + 1 + 2(33^2 + 33) = 3400. \quad \text{1 pont}$$

Ennél jobbat tudunk kapni, ha észrevesszük, hogy nagyjából minden negyedik 9-es mezőt hozzávehetjük a konstrukcióhoz, ha kicsit módosítunk rajta.

• Először vegyük észre, hogy minden fedő 3×3-as kistáblán az 1,2,4,5 sorszámúak közül tetszőleges 3-at választhatunk a többi kistáblán való választástól függetlenül.

• Másodszor vegyük észre, hogy négy egy csúcsban találkozó 3×3-as kistáblán tudunk úgy választani minden táblán hármat az 1,2,4,5 közül, hogy a bal felső 9-es szomszédaira nem áll hangya. Így pedig oda is felállíthatunk egyet, ezzel megjavítottuk a 3400-as konstrukciót.

2 pont

1	**2**	3	**1**	**2**	3	...	**1**
4	5	6	4	**5**	6	...	**4**
7	8	**9**	7	8	9	...	7
1	2	3	1	**2**	3	...	**1**
4	**5**	6	**4**	**5**	6	...	**4**
7	8	9	7	8	9	...	7
...	...	...	...	...	...	...	...
1	**2**	3	**1**	**2**	3	...	**1**

Tulajdonképpen 3×3-as helyett 6×6-os kis táblákkal való fedés alapján minden 6×6-os kis tábla közepén álló 9-es még hozzávehető. Az ilyen 6×6-os fedők száma $\lfloor 100/6\rfloor^2 = 16^2$, ennyit tehát még nyerhetünk az előző konstrukcióhoz képest, ez $3400 + 256 = 3656$-ot ad.

Megjegyzés: Amennyiben a versenyző az a) részt igazolja, de nem jut tovább, 4 pontot kap. Ha valaki a b) részt megoldja, az értelemszerűen az a) részre is megoldást ad, ezért a b) részben 7 pont kerül kiosztásra az útmutatóban.

(b) Tekintsük az ábra szerint kijelölt mezőket!

X	X		X	X				X
X	X				X	X		X
		X	X		X	X		
X		X	X				X	X
X				X	X		X	X
	X	X		X	X			
	X	X				X	X	
			X	X		X	X	

Algebrailag ez azt jelenti, hogy az 1. sorban kiválasztjuk azon oszlopok mezőit, amelyek sorszáma 8-cal osztva $1, 2, 4, 5$ maradékot ad, és a későbbi sorokban is ennek a kiválasztásnak az eltoltjait alkalmazzuk, egész pontosan az (i, j) mező kijelölt ha a $j - 5(i - 1)$ kifejezés 8-as maradéka $1, 2, 4, 5$ valamelyike. 3 pont

Ebben ha a kijelölt 2×2-es blokkokból a jobb alsó mezőt kihagyjuk, akkor a feltételeknek megfelelő elrendezést kapunk, figyelembe véve a hangyatávolságok lehetséges értékeit.

2 pont

A sorok mindegyike azonos szerkezetű, különböző kezdőmezővel: 1×2-es kijelölt blokkok, felváltva 1 illetve 3 hosszú jelöletlen blokkokkal elválasztva.
A kijelölt mezők száma 8×8-as blokkonként a mezők fele, de annak $3/4$-e marad meg, miután a jobb alsó sarkokat kihagyjuk. Így a $\lfloor 100/8\rfloor^2$ darab teljes 8×8-as blokkban kapunk $144 \cdot 32 \cdot 0.75 = 3456$ megfelelő hangyahelyet, az alsó 4×100-as sávban és az utolsó oszlopok alkotta 100×4-es sávban találunk további $12 \cdot \lfloor 100/8\rfloor + 8$ hangyahelyet, és itt a jobb alsó 4×4-esbeli 8 db-ot 2-szer számoltuk, vagyis összesen $3456 + 2 \cdot 144 + 8 = 3752$ hangya lehet így a táblán. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat Az ABCD húrnégyszög oldalainak hossza $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$. Jelölje r_a annak a körnek a sugarát, amely az AB oldalt egy belső pontban kívülről érinti, továbbá érinti a BC és AD oldalegyeneseket is. Hasonlóképpen értelmezzük az r_b, r_c és r_d sugarú köröket. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} \geq \frac{8}{\sqrt[4]{abcd}}$$

Megoldás: Használjuk az $ABCD$ négyszög szögeire a szokásos jelöléseket, ezek felhasználásával

$$a = r_a \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \right).$$ 1 pont

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{a}{r_a} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}, \quad \text{hasonlóan} \quad \frac{c}{r_c} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}.$$ 1 pont

Mivel $\alpha + \gamma = 180°$, így $\alpha/2 + \gamma/2 = 90°$, ezért

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1.$$ 1 pont

Ugyanilyen módon adódik, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = 1.$$

A korábban kapott egyenlőtlenségeket a-val illetve c-vel osztjuk, összeadjuk, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{2}{c}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} \geq 4\sqrt{\frac{1}{ac}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{ac}}.$$ 1 pont

Megismételve a gondolatmenetet kapjuk, hogy

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_d} \geq \frac{4}{\sqrt{bd}}.$$

Végül újra a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk a bizonyítanadót:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} \geq \frac{4}{\sqrt{ac}} + \frac{4}{\sqrt{bd}} \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{4}{\sqrt{bd}}} = \frac{8}{\sqrt[4]{abcd}}.$$ 2 pont

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a négyszög szögei és oldalai is egyenlők, tehát az $ABCD$ négyszög négyzet. 1 pont

Összesen: 7 pont