OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2023. november — A versenybizottság

1. feladat

Mely pozitív egész számok egyeznek meg a 3-as számrendszerbeli alakjuk számjegyei szorzatának kétszeresével?

Megoldás:

A keresett N számban nem szerepelhet a nulla számjegy, mert akkor a számjegyek szorzata, és így N maga is nulla lenne. Ezért a lehetséges számjegyek 1 és 2. (1 pont)

Legyen N jegyeinek száma n. Ekkor $N \geq 3^{n-1}$, a számjegyek szorzatának kétszerese pedig legfeljebb 2^{n+1}. (1 pont)

Azonban ha $n > 4$, akkor $3^{n-1} = 3^4 \cdot 3^{n-5} > 2^6 \cdot 2^{n-5} = 2^{n+1}$. Ezért a keresett szám legfeljebb négyjegyű lehet. (2 pont)

Ha a szám négyjegyű, akkor $N \geq 27 + 9 + 3 + 1 = 40 > 32 = 2^{4+1}$. Ezért a szám nem lehet négyjegyű sem. (1 pont)

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

Ha a szám háromjegyű, $N = \overline{abc}_3 = 9a + 3b + c = 2abc$, akkor $a = 1$ esetén a bal oldal legalább 13, a jobb oldal legfeljebb 8. Ha pedig $a = 2$, akkor a bal oldal legalább 22, a jobb oldal legfeljebb 16. Ezért a szám nem lehet háromjegyű sem. (1 pont)

Ha a szám kétjegyű, akkor $N = \overline{ab}_3 = 3a + b = 2ab$. A négy lehetséges esetet kipróbálva azt kapjuk, hogy az egyetlen megoldás $a = b = 2$, amikor $N = 8$. A szám nyilván nem lehet egyjegyű, ezért ez az egyetlen megoldás. (1 pont)

1. megjegyzés: Ha N-et 3^{n-1} helyett $3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1 = (3^n - 1)/2$-vel becsüljük alulról, akkor már a négyjegyű esetet sem kell külön megnézni. Ezért ez a becslés önmagában 2 helyett 3 pontot ér. Aki csak legfeljebb négyjegyű számokra oldja meg, legfeljebb 3 pontot kaphat.

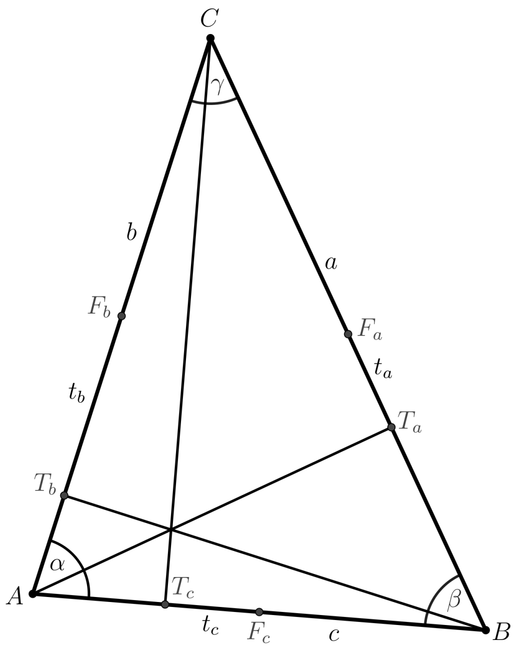
2. megjegyzés: A kétjegyű esetben az esetek végignézése helyett észrevehetjük, hogy $a \mid b \mid 3a$, és így $b < 3$ miatt $a = b$, majd a kapott egyenletet megoldhatjuk a-ra.

2. feladat

Egy háromszög oldalainak hossza legyen a, b és c. Jelölje rendre t_a, t_b, t_c az oldalegyeneseken a magasságtalppont és az oldalfelezőpont közötti távolságot. Bizonyítsuk be, hogy az $a \cdot t_a$, $b \cdot t_b$, $c \cdot t_c$ szorzatok egyike egyenlő a másik kettő összegével.

Első megoldás:

Ha a háromszög egyenlőszárú, akkor az állítás világos, így feltehetjük, hogy $a > b > c$. Legyen a szokásos módon $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ és $BCA\sphericalangle = \gamma$, ekkor $\alpha > \beta > \gamma$. Legyen az AC oldalon a magasság talppontja és a felezőpont rendre T_b és F_b.



Mivel $a > c$, így F_b a T_bC szakaszra esik. A T_bBA derékszögű háromszögből $T_bA = c \cos \alpha$, ahol a szakasz hossza előjelesen értendő: $\alpha > 90°$ esetén negatív, ekkor T_b az AC szakasz A-n túli meghosszabbítására esik. (Ilyenkor a T_bBA derékszögű háromszög A-nál lévő szöge $180° - \alpha$, ha pedig $\alpha = 90°$, akkor a derékszögű háromszög nem jön létre, T_b és A egybeesik.) Ezért $t_b = \frac{b}{2} - c \cos \alpha$, ez az összefüggés tehát akkor is érvényes, ha $\alpha \geq 90°$. (1 pont)

A koszinusz-tétel alapján $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, amiből $bc\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$. (1 pont)

Ezt használva

$$bt_b = b\left(\frac{b}{2} - c\cos\alpha\right) = \frac{b^2}{2} - bc\cos\alpha = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{a^2-c^2}{2}. \quad \text{(3 pont)}$$

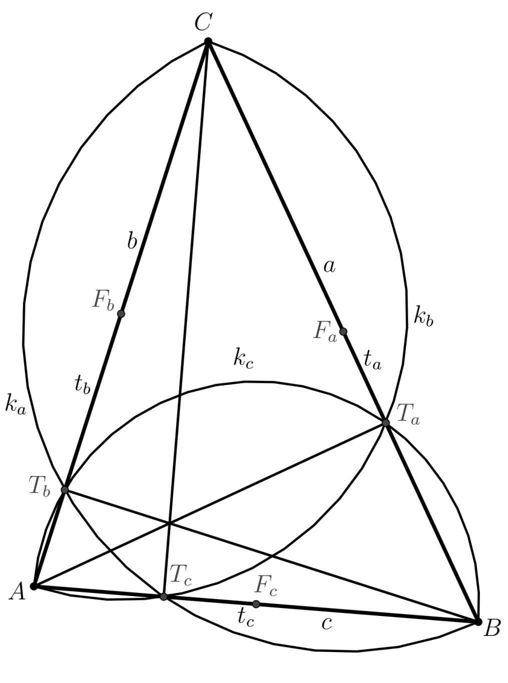
Hasonlóan számolhatjuk at_a és ct_c értékét is. Mivel $b > c$, így a fentivel logikailag szimmetrikus számolásból azt kapjuk, hogy $at_a = \frac{b^2-c^2}{2}$, és $a > b$ miatt $ct_c = \frac{a^2-b^2}{2}$. Ezeket összevetve,

$$at_a + ct_c = \frac{b^2-c^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} = \frac{a^2-c^2}{2} = bt_b,$$

ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

Második megoldás:

Az előző megoldáshoz hasonlóan most is feltehetjük, hogy $a > b > c$. Legyenek rendre F_a, F_b, F_c az oldalfelezőpontok, és legyenek k_a, k_b, k_c az oldalak mint átmérők fölé írt körök. Mindegyik kör áthalad a másik két oldalhoz tartozó magasságtalppontokon. (1 pont)



Mivel $a > b > c$ (hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszög esetén egyaránt) F_a a (nagyobb) k_b körön belül, míg a (kisebb) k_c körön kívül található. Ugyanígy F_b a k_a körön belül, de a k_c körön kívül, F_c pedig a k_a körön belül, de a k_b körön kívül van. (1 pont)

Egy r sugarú kör középpontjától d távolságra levő pontnak a körre vonatkozó hatványa $d^2 - r^2$ (ez tehát belső pont esetén negatív, külső pont esetén pozitív). Ez alapján az F_a pontnak a k_c körre vonatkozó hatványa $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$ (hiszen F_aF_c középvonal), ami egyenlő a szelődarabok $t_a \cdot \frac{a}{2}$ szorzatával:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = t_a \cdot \frac{a}{2}. \quad \text{(3 pont)}$$

(Ugyanezt az összefüggést kapjuk, ha az F_a pontnak a k_b körre vonatkozó hatványát írjuk fel.) Hasonlóan az F_b pontnak a k_c körre vonatkozó hatványa

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = t_b \cdot \frac{b}{2}.$$

Végül az F_c pontnak a k_b körre vonatkozó hatványa

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = t_c \cdot \frac{c}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel az első és a harmadik egyenlőség bal oldalán álló kifejezések összege egyenlő a második egyenlőség bal oldalával, ugyanez teljesül a jobb oldalakra is:

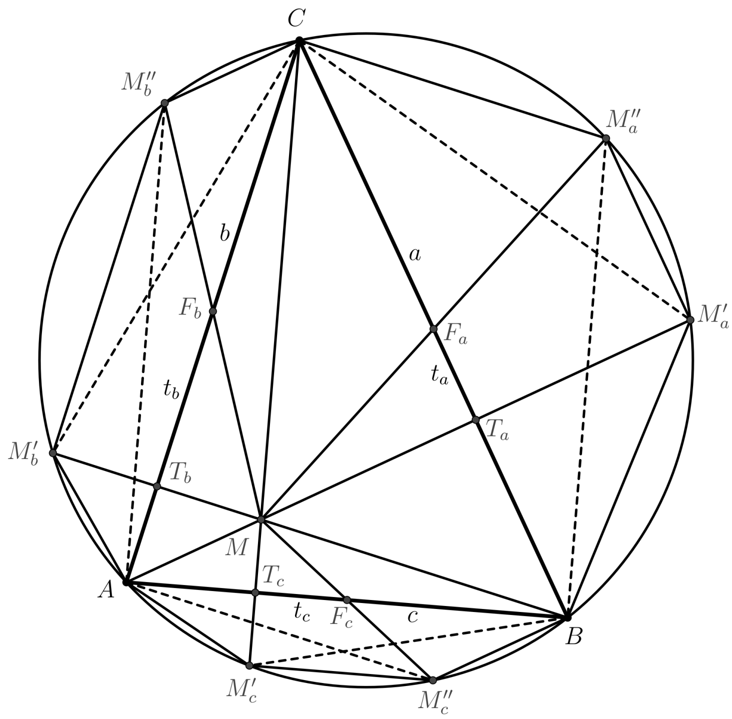
$$t_a \cdot \frac{a}{2} + t_c \cdot \frac{c}{2} = t_b \cdot \frac{b}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezzel beláttuk, hogy az egyik (mégpedig a „középső") oldalhoz tartozó szorzat valóban egyenlő a másik kettő összegével.

Harmadik megoldás:

Az előző megoldásokhoz hasonlóan most is feltehetjük, hogy $a > b > c$.

Legyen az M magasságpontnak az a oldal egyenesére való tükörképe M'_a, az a oldal felezőpontjára való tükörképe pedig M''_a. Ismert (és például szögszámolással könnyen látható), hogy mindkét tükörkép rajta van a háromszög köré írt körén, és távolságuk $2t_a$ (hiszen T_aF_a az $M'_aM''_a$ oldalhoz tartozó középvonal az $MM'_aM''_a$ háromszögben). Ugyanígy kapjuk az M'_b, M''_b, illetve az M'_c, M''_c pontokat. (1 pont)



A kör AM'_b és AM'_c húrjai az oldalegyenesekre való tükrözések miatt, CM''_b és BM''_c húrjai pedig a felezőpontokra való tükrözések miatt AM hosszúságúak. Hasonlóan adódik, hogy BM hosszúságúak a BM'_a, BM'_c, CM''_a, AM''_c húrok, illetve CM hosszúságúak a CM'_a, CM'_b, BM''_a, AM''_b húrok. (2 pont)

Mivel $c < b$, a B, C, M''_a és M'_a pontok alkotta húrnégyszögben (húrtrapézban) az átlók MC, a szárak MB hosszúságúak. Így Ptolemaiosz tétele alapján

$$MC^2 - MB^2 = a \cdot 2t_a \qquad \text{(2 pont)}$$

Hasonlóan az A, B, M_c'' és M_c' pontok által alkotott húrnégyszögben $b < a$ miatt

$$MB^2 - MA^2 = c \cdot 2t_c,$$

valamint a C, A, M_b' és M_b'' által alkotott húrnégyszögben $c < a$ miatt

$$MC^2 - MA^2 = b \cdot 2t_b. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel az első két egyenlőség bal oldalán álló kifejezések összege egyenlő a harmadik egyenlőség bal oldalával, ugyanez teljesül a jobb oldalakra is, ezért

$$2at_a + 2ct_c = 2bt_b.$$

Ily módon beláttuk, hogy az egyik (mégpedig a „középső") oldalhoz tartozó szorzat valóban egyenlő a másik kettő összegével. (1 pont)

1. megjegyzés: Úgy is teljes megoldáshoz juthatunk, ha (például előjeles távolságokra áttérve) azt látjuk be, hogy a $\pm at_a \pm bt_b \pm ct_c$ összegnek van olyan előjelezése, ami 0-t ad eredményül, hiszen ilyenkor mindenképpen két pozitív és egy negatív előjelnek kell szerepelnie, vagy fordítva, ami a bizonyítandó állítást eredményezi. Ily módon elkerülhetővé válhat az oldalakon a felezőpont és magasságtalppont sorrendjének, vagy annak diszkutálása, hogy egy pont egy bizonyos körön belül vagy kívül helyezkedik-e el.

3. feladat

Igazoljuk, hogy minden n nemnegatív egész számra

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+3} \rfloor.$$

(Itt $\lfloor x \rfloor$ az x egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb k egész számot, melyre $k \le x$.)

Első megoldás:

Az $n = 0$ esetben az állítás $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, mely persze valóban teljesül. A továbbiakban föltesszük, hogy n pozitív.

Feledkezzünk el egy pillanatra az egészrészekről, és tekintsük a két oldalon álló, $a(n) = \sqrt{n} + \sqrt{4n+2}$ és $b(n) = \sqrt{9n+3}$ kifejezéseket. Ezeket négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} a(n)^2 &= (\sqrt{n} + \sqrt{4n+2})^2 = n + (4n+2) + 2\sqrt{n(4n+2)} = 5n + 2 + \sqrt{16n^2+8n}, \\ b(n)^2 &= (\sqrt{9n+3})^2 = 9n + 3. \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy ezek egymáshoz nagyon közel vannak (mint ahogy arra a bizonyítandó állítás alapján számíthatunk is): különbségük

$$b(n)^2 - a(n)^2 = 4n + 1 - \sqrt{16n^2+8n} = \frac{(4n+1)^2 - (16n^2+8n)}{(4n+1) + \sqrt{16n^2+8n}} = \frac{1}{(4n+1) + \sqrt{16n^2+8n}} < \frac{1}{8n}.$$

(2 pont)

Azt is látjuk, hogy a fönti különbség pozitív, mint ahogy $a(n)$ és $b(n)$ is azok, így $a(n) < b(n)$. A bizonyítandó $\lfloor a(n) \rfloor = \lfloor b(n) \rfloor$ állításhoz elég lenne tehát belátnunk, hogy nincs olyan k egész, melyre $a(n) < k \le b(n)$, azaz $b(n)$ közelebb áll $a(n)$-hez, mint a legközelebbi, $a(n)$-nél nagyobb egész szám.

(1 pont)

Az előbbiek alapján $b(n) - a(n)$-re a

$$b(n) - a(n) = \frac{b(n)^2 - a(n)^2}{b(n) + a(n)} < \frac{1/(8n)}{\sqrt{9n} + \sqrt{n} + \sqrt{4n}} = \frac{1}{48n\sqrt{n}} \qquad \text{(1 pont)}$$

becslés adódik (hiszen $a(n) > \sqrt{n} + \sqrt{4n}$, és $b(n) > \sqrt{9n}$). Ez elég is lesz nekünk:

$$\sqrt{9n+3} - \sqrt{9n+2} = \frac{(9n+3) - (9n+2)}{\sqrt{9n+3} + \sqrt{9n+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{12n} + \sqrt{11n}} > \frac{1}{8\sqrt{n}} > \frac{1}{48n\sqrt{n}} > \sqrt{9n+3} - a(n),$$

azaz $\sqrt{9n+2} < a(n) < \sqrt{9n+3} = b(n)$. Így ha egy k egész szám az $\big(a(n), b(n)\big]$ intervallumba esne, akkor $9n + 2 < k^2 \leq 9n + 3$ kellene fönnálljon, azaz csak $k^2 = 9n + 3$ lehetne. (2 pont)

De ez lehetetlen, hiszen négyzetszámban a 3 prímtényező kitevője páros, ezzel szemben $9n + 3$ alakú számban pontosan 1. Ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

1. megjegyzés: Láthatjuk, hogy az utolsó egyenlőtlenségsorban a becslés elég bőségesen teljesült – nem csak a konstans együtthatóban, hanem a nagyságrendjében is volt eltérés a bal és jobb oldal között. Addig a pontig jelen megoldásban aszimptotikusan éles becsléseket adtunk, de ennél jóval nagyvonalúbban eljárva is lehetséges jó végeredményre jutni.

2. megjegyzés: Az alkalmazott becslésektől függően elképzelhető, hogy a bizonyítás egyes kis n-ek különálló kezelését igényli – a fönti megoldásban az $n = 0$ esettel volt ez a helyzet. Amennyiben ez a helyzet áll fönn és a versenyző ezt nem veszi észre vagy végzi el helyesen, maximálisan 6 pont adható.

3. megjegyzés: Az $a(n) < b(n)$ egyenlőtlenség igazolásáért 2 pont adható.

Második megoldás:

Megmutatjuk, hogy

$$\sqrt{9n+2} \leq \sqrt{n} + \sqrt{4n+2} \leq \sqrt{9n+3}\,.$$

Valóban, négyzetre emelve és átrendezve, ekvivalens átalakítással

$$4n \leq 2\sqrt{n}\sqrt{4n+2} \leq 4n + 1$$

adódik. Ismételt négyzetre emeléssel

$$16n^2 \leq 16n^2 + 8n \leq 16n^2 + 8n + 1\,.$$

Így $\lfloor\sqrt{9n+2}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{n} + \sqrt{4n+2}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{9n+3}\rfloor$. (4 pont)

Másrészt, ha $k = \lfloor\sqrt{9n+3}\rfloor$, akkor $k^2 \leq 9n + 3$. Itt nem állhat egyenlőség, mert ha egy négyzetszám osztható 3-mal, akkor osztható 9-cel is. (1 pont)

Ezért $k^2 \leq 9n + 2$, azaz $\lfloor\sqrt{9n+3}\rfloor = k \leq \lfloor\sqrt{9n+2}\rfloor$ (valójában tehát $\lfloor\sqrt{9n+3}\rfloor = \lfloor\sqrt{9n+2}\rfloor$). A fent bizonyított egyenlőtlenség alapján így az állítást beláttuk. (2 pont)

4. feladat

Egy seregszemlén 100 katona sorakozik fel egymás mellett, balról jobbra magasság szerint növekvő sorrendben. Valamilyen sorrendben minden katonának felolvassák a nevét. Az a katona, aki a saját nevét hallja, helyet cserél a bal oldali szomszédjával, kivéve ha a sor bal szélén áll, ebben az esetben nem mozdul. Hány különböző sorrendben állhatnak a katonák a felolvasás végén?

Első megoldás:

Általánosan, n katonával oldjuk meg a feladatot. Nevezzük a katonák egy sorrendjét *érdekesnek*, ha minden katona az eredeti pozíciójához képest vagy jobbra mozdult el valamennyivel, vagy nem mozdult, vagy balra mozdult el egy hellyel. Azt állítjuk, hogy pontosan az érdekes sorrendek alakulhatnak ki a felolvasás végére. Világos, hogy más sorrend nem lehetséges, mert minden katona csak akkor tud balra mozdulni, amikor éppen az ő nevét olvassák fel, így nem kerülhet több, mint egy hellyel balra az eredeti pozíciójához képest. Így azt kell még megmutatni, hogy az összes érdekes sorrendbe el is lehet jutni megfelelő felolvasási sorrenddel. (1 pont)

Indukcióval bizonyítunk egy erősebb állítást. Amellett, hogy belátjuk, hogy minden érdekes sorrend elérhető, azt is igazoljuk, hogy úgy is elérhető minden érdekes sorrend, hogy az érdekes sorrendben csak a sor jobb szélén álló katona nevének kivételével olvassák fel mindenkinek a nevét. (1 pont)

Az állítás $n = 1$ esetén világos. Tegyük fel, hogy $n-1$ esetén már igazoltuk az állítást, és most igazoljuk n-re is. Legyenek a katonák $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az eredeti sorrend szerint. Tekintsünk egy tetszőleges érdekes sorrendet, és tegyük fel, hogy a végére A_k kerül a sor jobb szélére. Négy részre bontjuk az indukciót, aszerint, hogy két állítást kell egyszerre bizonyítanunk (mindenkit felolvasnak, vagy A_k-t nem), illetve hogy $k = n$ vagy nem.

1. eset: $k = n$, és A_k-t is felolvassák.

Felejtsük el egy pillanatra A_n-et, és tekintsük csak az első $n-1$ katonát, illetve az ő sorrendjüket a megadott érdekes sorrendben, legyen közülük A_ℓ a sor jobb szélén. Indukció miatt létezik olyan felsorolása az első $n-1$ katona nevének, melyben A_ℓ-et nem olvassák fel, és a végén a megfelelő sorrendbe érkeznek. Ez alatt A_n nyilván nem mozdul a sor jobb széléről. Ezek után olvassák még fel A_n-et, majd A_ℓ-et. Így végül mindenkinek felolvasták a nevét, és éppen a megfelelő sorrendet kaptuk. (1 pont)

2. eset: $k = n$, és A_k-t nem olvassák fel.

Az A_n katonán kívül a többi $n-1$ katonának fel lehet olvasni a nevét úgy, hogy éppen megfelelően sorba rendeződjenek, ezalatt A_n is a helyén marad, és az ő nevét nem olvasták fel.

3. eset: $k \neq n$, és A_k-t is felolvassák.

Ekkor A_n biztosan jobbról a második helyre kerül, mert nem mozdulhat egynél többet balra. Ismét felejtsük el A_n-et, és tekintsük csak a többi katona egymáshoz viszonyított kezdő, illetve kívánt sorrendjét. Világos, hogy ez is egy érdekes sorrend, így az indukciós feltevés szerint fel lehet olvasni a neveket úgy, hogy ebbe a sorrendbe kerüljenek. Végül A_n nevét felolvasva éppen a megfelelő sorrendet kapjuk. (1 pont)

4. eset: $k \neq n$, és A_k-t nem olvassák fel.

A_n itt is biztosan jobbról a második helyre kerül. Felejtsük el A_n-et, és tekintsük csak a többi katona egymáshoz viszonyított kezdő, illetve kívánt sorrendjét, ebben is A_k kerül a sor jobb szélére. Indukció miatt fel lehet olvasni a neveket A_k kivételével úgy, hogy ebbe a sorrendbe kerüljenek. Végül A_n nevét felolvasva éppen a megfelelő sorrendet kapjuk, és A_k nevét nem olvasták fel. (1 pont)

Már csak az maradt, hogy meghatározzuk az érdekes sorrendek számát. Jelölje ezt n ember esetén a_n. Vegyük észre, hogy akár a jobb oldali, akár jobbról a második helyre kerül A_n egy érdekes sorrendben, ha róla megfeledkezünk és csak a többi katona relatív sorrendjét nézzük, akkor ők is egy érdekes sorrendet alkotnak ($n-1$ katona esetén). Ráadásul ez visszafelé is igaz: ha veszünk egy érdekes sorrendet $n-1$ katonával, majd beillesztjük A_n-et akár a jobb oldali, akár jobbról a második helyre, egy érdekes sorrendet kapunk n katonával, továbbá világos, hogy az így kapott érdekes sorrendek mind különbözőek. Ezek alapján $a_n = 2a_{n-1}$ tetszőleges $n \geq 2$ egész számra. Látható, hogy $a_1 = 1$, így indukcióval megkapjuk, hogy $a_n = 2^{n-1}$, azaz a válasz a feladat kérdésére $a_{100} = 2^{99}$. (2 pont)

További útmutató a pontozáshoz:

Az indukciót többféleképpen is el lehet mondani. Az általános pontozási elv, hogy ha a diák megsejti, hogy mely sorrendek érhetőek el, az 1 pont, ha kimondja, hogy erősebb indukciót bizonyít, az még 1 pont, az indukció bizonyítása 3 pont, és végül az érdekes sorrendek megszámolása 2 pont.

Második megoldás:

Legyenek a katonák $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ az eredeti sorrend szerint. Világos, hogy balra mindenki legfeljebb egy hellyel mozdulhat el, hiszen amikor az ő nevét olvassák, akkor (legfeljebb) egy hellyel mozdul balra, mindenki más nevének olvasásakor pedig vagy a helyén marad, vagy jobbra mozdul (1-gyel). Legyen H azok sorszámának halmaza, akik egy felolvasásnál 1-gyel balra kerültek. (1 pont)

Először megmutatjuk, hogy H meghatározza a végső sorrendet. Tudjuk, hogy $i \in H$ esetén A_i az $(i-1)$-edik helyre került, belátjuk, hogy $i \notin H$ esetén is egyértelműen meghatározott, hova kerül végül A_i. Legyen k a legnagyobb index, melyre $k \notin H$. Ekkor $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{100}$ kerültek a k-adik, $(k+1)$-edik, ..., 99-edik helyre, így mivel A_k balra nem mozdulhatott, csak a 100-adik helyre kerülhetett. Azt mondjuk ilyenkor, hogy $(A_k, A_{k+1}, \dots, A_{100})$ egy *kör*: egy kört szomszédos katonák alkotnak, akik közül a bal szélső a körön belül végül a jobb szélére kerül, a többiek pedig mind 1-gyel balrább kerülnek. Ha $1 < k$, akkor ezután legyen $k' < k$ a legnagyobb olyan index, melyre $k' \notin H$, az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $(A_{k'}, A_{k'+1}, \dots, A_{k-1})$ is egy kör, és így tovább. Mindezt addig folytatjuk, amíg el nem fogynak a katonák, az utolsó körben A_1 lesz az első katona. Tehát H valóban meghatározza a végső sorrendet. (2 pont)

Most megmutatjuk, hogy bármely $H \subseteq \{2, 3, \dots, 100\}$ meg is kapható (A_1 biztosan nem kerülhet balrább). Ha $(C_1, \dots, C_i)$ és $(D_1, \dots, D_j)$ szomszédos körök, tehát az elején $C_1, \dots, C_i, D_1, \dots, D_j$ egymás mellett álltak ebben a sorrendben, akkor, ha valamikor, amikor még mindig ugyanitt vannak változatlan sorrendben, $C_2, C_3, \dots, C_i, D_1, C_1, D_2, \dots, D_j$ sorrendben felolvassuk a nevüket, akkor köztük a kívánt $C_2, \dots, C_i, C_1, D_2, \dots, D_j, D_1$ sorrend alakul ki (ha esetleg tőlük balra, vagy jobbra mások is vannak, akkor sem kerülnek azokra a helyekre, és senki másnak a pozíciója nem változik). Ha a H halmaz esetén a körök száma páros, akkor a köröket szomszédos párokba osztjuk (első kettő, következő kettő, és így tovább), és páronként az előbbi sorrendben olvassuk fel a neveket. (Mondjuk balról jobbra haladva, de valójában a szomszédos kör-párok között tetszőleges sorrend választható.) (2 pont)

Ha pedig páratlan sok kör van, akkor az elsőt vegyük külön, a többieket az előzőhöz hasonlóan párokba osztva alkalmazzuk az előbbi módszert. Ha a legelső kör $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, akkor itt az $A_1, A_2, \dots, A_m$ sorrendben olvassuk fel a neveket, és a kívánt $A_2, \dots, A_m, A_1$ sorrendet kapjuk. Tehát bármely $H \subseteq \{2, 3, \dots, 100\}$ meg is kapható. (1 pont)

Mivel világos, hogy különböző H-khoz különböző sorrend tartozik, így a lehetséges végső sorrendek száma pontosan annyi, ahány részhalmaza van a 99-elemű $\{2, 3, \dots, 100\}$ halmaznak, azaz 2^{99}. (1 pont)

5. feladat

Legyen m pozitív egész szám. Az $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$ halmazon tekintsük a $\ominus$ jelölésű modulo m kivonást, azaz

$$a \ominus b = \begin{cases} a - b, & \text{ha } a \geq b, \\ a - b + m, & \text{ha } a < b. \end{cases}$$

Legyen B az M egy k elemű részhalmaza, és tegyük fel, hogy vannak olyan $a, b \in B$ nem feltétlenül különböző elemek, melyekre $a \ominus b \notin B$. Mutassuk meg, hogy ekkor a B elemeiből képezhető k^2 darab modulo m különbség közül legfeljebb $k^2 - k + 1$ lehet B-beli.

Első megoldás:

A feladat állítását m-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Világos, hogy ha van B-n kívüli különbség is, akkor $k \leq m - 1$, így az első érdekes eset $m = 2$ (hiszen $m = 1$-re az állítás automatikusan teljesül, mert üres: nincs ilyen B halmaz). Ha $m = 2$, akkor csak $k = 1$ lehet, ekkor egyetlen különbség van, ezért az állítás biztosan teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ olyan egész szám, amely mellett a feladat állítását beláttuk minden olyan esetben, amikor $2 \leq m < n$. Legyen B az $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmaz olyan k-elemű részhalmaza, hogy a B elemeiből képezhető k^2 darab különbség között van B-n kívüli. (1 pont)

Ha nincs olyan $b_0 \in B \setminus \{0\}$ elem, melyre a $b \ominus b_0$ alakú ($b \in B$) elemek mind B-beliek, akkor készen vagyunk, mert ekkor van legalább $k - 1$ darab B-n kívüli különbség: minden $b_0 \in B \setminus \{0\}$-hoz legalább egy $b \ominus b_0$ alakú. Feltehetjük tehát, hogy egy rögzített $b_0 \in B \setminus \{0\}$ elemre a $b \ominus b_0$ alakú ($b \in B$) különbségek mind B-beliek. (2 pont)

Jelölje b_0 és n legnagyobb közös osztóját d. Ismeretes, hogy b_0-nak van olyan egész számú többszöröse, aminek n-nel való osztási maradéka d. Így (akár többszörösen) alkalmazva az előző észrevételünket, kapjuk, hogy tetszőleges $b \in B$ elemre teljesül, hogy $b \ominus d$ szintén B-beli. Tehát ha találunk egy B-beli elemet, ami egy adott maradékot ad d-vel osztva, akkor B-ben az összes olyan $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazba eső elem is szerepel, ami ugyanezt a maradékot adja d-vel osztva. Ráadásul d biztosan kisebb n-nél, mivel d osztója b_0-nak, melyre $0 < b_0 < n$. (2 pont)

Értelmezzük a B^* halmazt a B halmaz segítségével a következő módon: a $B^* \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$ halmazba kerüljenek mindazok a d-vel való osztási maradékok, melyek valamely B-beli elem d-vel való osztási maradékai. Ha a B^* halmaznak r különböző eleme van, akkor $k = r \cdot \frac{n}{d}$. Mivel a B elemeiből képzett modulo n különbségek nem mind B-beli elemmel egyenlők, ezért az indukciós feltevés miatt a B^* halmaz elemeiből képzett modulo d különbségek közül legalább $r - 1$ darab B^*-on kívüli. Ezért a B elemeiből képzett modulo n különbségek között legalább $(r-1) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^2$ darab olyan van, ami B-n kívül. Azt kell belátnunk, hogy ez legalább $k - 1 = r \cdot \frac{n}{d} - 1$. Felírva az összehasonlítandó kifejezések különbségét, kapjuk, hogy

$$(r-1) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^2 - \left(r \cdot \frac{n}{d} - 1\right) = r \cdot \left[\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{n}{d}\right] + 1 - \left(\frac{n}{d}\right)^2 = \left(\frac{n}{d} - 1\right) \cdot \left[(r-1) \cdot \frac{n}{d} - 1\right].$$

Ha $r = 1$ lenne, akkor B^* csak a 0-t tartalmazná (világos, hogy $0 \in B^*$), a B halmaz pedig d többszöröseit, viszont ekkor minden különbség B-beli lenne. Tehát $r \geq 2$, így mivel $\frac{n}{d} > 1$, ezért a vizsgált különbség biztosan pozitív, amivel az indukciós lépést igazoltuk. Tehát az állítás n-re is teljesül. (2 pont)

Második megoldás:

Tegyük fel indirekten, hogy B ellenpélda a feladat állítására. A modulo m összeadást és kivonást B elemei között egyszerűen $+$ és $-$ jelöli. Készítsünk egy színezett, irányított gráfot, melynek csúcsai B elemei, és ha $a, b, b - a \in B$, akkor egy $b - a$ színű $a \to b$ élet behúzunk. Ha $b - a \notin B$, akkor azt mondjuk, hogy $a \to b$ *hiányzó* él. Mivel B ellenpélda, a hiányzó élek száma legalább 1 és legfeljebb $k - 2$. Ezért legalább egy (sőt legalább két) hurokélnek szerepelnie kell. Tehát van olyan $a \in B$, hogy $a - a \in B$, azaz $0 \in B$. Így minden hurokél szerepel a gráfban, a továbbiakban csak a többi éllel foglalkozunk. (1 pont)

Tegyük fel, hogy $u \to v$ egy hiányzó él, ekkor $u \neq v$ (és $v - u \notin B$). Ha $0 \neq c \in B$ olyan, hogy u-ból és v-ből is indul c színű él, amelyek végpontja tehát $u + c$, illetve $v + c$, akkor $u + c \to v + c$ szintén hiányzó él, hiszen $(v + c) - (u + c) = v - u \notin B$. (2 pont)

Legyen U az u-ból induló (nem hurok) élek címkéinek halmaza. Az u-ból induló irányított élek színe nyilván páronként különböző, ezért az U halmaz $|U|$ elemszáma az u csúcs ki-foka. Így u-ból „indul" $k - 1 - |U|$ darab hiányzó él, az $u \to v$ hiányzó élet is beleszámítva. Hasonlóképpen legyen V a v-ből induló (nem hurok) élek címkéinek halmaza, és V elemszáma $|V|$. Ekkor v-ből „indul" $k - 1 - |V|$ darab hiányzó él. (2 pont)

Nyilván $U \cup V \subseteq B \setminus \{0\}$, így $|U| + |V| - |U \cap V| = |U \cup V| \leq k - 1$. Számoljuk össze a most felderített hiányzó éleket. Minden $c \in U \cap V$-hez tartozik egy $u + c \to v + c$ él, ez $|U \cap V|$ darab hiányzó élt jelent. Ezek egyike sem indul u-ból, mert $c \neq 0$, és nem indul v-ből sem, mert $v - u \notin B$. Hozzáadva az u-ból, illetve v-ből induló hiányzó élek számát, az eredmény

$$|U \cap V| + (k - 1 - |U|) + (k - 1 - |V|) = 2k - 2 - (|U| + |V| - |U \cap V|) \geq 2k - 2 - (k - 1) = k - 1\,.$$

Tehát ha van hiányzó él, akkor $k - 1$ is van, ami az indirekt feltevésünknek ellentmond. (2 pont)

1. megjegyzés: Ha egy B halmaz nem üres, és kivonásra zárt (azaz bármely két elemének modulo m vett különbsége is eleme a halmaznak), akkor van olyan $d \mid m$, melyre B pontosan a d szám (m-nél kisebb, nemnegatív) többszöröseiből áll (és ekkor $k = m/d$). Valóban, ha d a legkisebb pozitív eleme B-nek, akkor a d címke is k élen kell, hogy szerepeljen, azaz B szomszédos elemei között mindig d a különbség.

2. megjegyzés: Ha B-t úgy definiáljuk, hogy a $\{0, 1, \ldots, m - 1\}$ halmazból kivesszük az 1-et, akkor pontosan $k - 1 = m - 2$ hiányzó él lesz: $2 \to 3 \to 4 \to \ldots \to m - 2 \to m - 1 \to 0$. Így a feladatbeli becslés éles.