



OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
döntő  
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA  
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATLAP

**1. feladat**

Legfeljebb hány egész koordinátájú pont adható meg a térben úgy, hogy mindegyik egyenlő távolságra legyen az origótól, és bármely kettő az origóval együtt egyenlő területű háromszöget alkosson?

**2. feladat**

Egy lakótelepről néhány gyerek szakkörre jár. A szakkörök résztvevői között fiú és lány is van, és minden fiú pontosan  $p$ , minden lány pontosan  $q$  szakkörre jár, ahol  $p$  és  $q$  pozitív egész számok, továbbá bármely fiú-lány pár legfeljebb egy közös szakkört látogat. Tudjuk továbbá, hogy bármely két szakkör esetén az elsőre pontosan akkor jár több fiú, mint a másodikra, ha lány is több jár az elsőre, mint a másodikra. Legalább hány szakkörnek kell lennie? (A választ  $p$  és  $q$  függvényében adjuk meg.)

**3. feladat**

Legyenek  $k$  és  $\ell$  pozitív egész számok,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  és  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\ell$  pozitív egész számok, végül legyen  $q(x)$  egy legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom. Tegyük föl, hogy minden  $n$  pozitív egész számra  $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n + q(n)$  osztója a  $b_1^n + b_2^n + \dots + b_\ell^n + q(n)$  számnak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $k = \ell$  és  $a_i = b_i$  minden  $1 \leq i \leq k$  esetén.

---

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS  
MINISZTERIUM

 Nemzeti  
Tehetség Program