OKTATÁSI HIVATAL

A 2024/2025. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(gimnázium)
Javítási-értékelési útmutató

1. feladat (a) Hány olyan $a < b < c$ pozitív egészekből álló számhármas van, ahol mindegyik szám kétjegyű és osztója a másik kettő összegének?

(b) Megadható-e 2024 darab különböző pozitív egész úgy, hogy mindegyik osztója a többi 2023 szám összegének?

Megoldás: (a) Tudjuk, hogy c-nek többszöröse $a+b$, viszont a feltétel miatt $a+b<2c$, így csak $a+b=c$ lehet. 1 pont

Tudjuk, hogy b-nek többszöröse $a+c$, viszont $a+c=a+(a+b)=2a+b<3b$. Mivel $b<c$, ezért $b<a+c<3b$, így csak $a+c=2b$ lehet. 1 pont

Ekkor $a+c=a+(a+b)=2a+b=2b$ miatt $2a=b$. Azt kaptuk, hogy a feladat feltételeit minden a értékre az a; $b=2a$; $c=3a$ számhármasok teljesítik. 1 pont

Mivel a kétjegyű megoldások száma a kérdés, ezért $9<a$ és $3a<100$. Tehát 24 megfelelő számhármas lesz az előzőek alapján, ahol $a \in \{10, 11, 12, ..., 32, 33\}$. 1 pont

(b) Igen, megadható. Tekintsük az $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ kezdőértékekkel definiált sorozatot, aminek további elemei $i=1,2,...$ esetén legyenek $x_{3+i}=2^i \cdot 3$. Tehát a 3-tól kezdve a sorozat egy 2 kvóciensű mértani sorozat (1, 2, 3, 6, 12, 24, ...). Ha $n>2$ pozitív egész, akkor a sorozat első n elemét tekintve megfelelő számokat kapunk, így $n=2024$-re is. 1 pont

A sorozat első $n>3$ elemének összege legyen S_n, ami a mértani sorozat összegképlete alapján

$$S_n = 1+2+3+2\cdot 3+...+2^{n-3}\cdot 3 = 1+2+3\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2-1} = 3\cdot 2^{n-2}. \qquad 1 \text{ pont}$$

Mivel S_n többszöröse a sorozat minden x_i elemének $(i=1,2,...,n)$, így nyilván minden i-re x_i osztója lesz a többi elem összegének, azaz $S_n - x_i$-nek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A (b) részre adható más megoldás is. Például legyen az első négy elem 1, 2, 4, 7, a továbbiak pedig a 7-tel induló, 2 kvóciensű mértani sorozat elemei 14, 28, 56, ... Minden $n>4$-re a sorozat első n eleme megfelelő számokat ad.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-24 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

2. feladat Egy kilenc fős társaságban öt lány és négy fiú van. Három darab három fős csoportba osztjuk őket teljesen véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyikben három lány lesz, ha tudjuk, hogy minden csoportban van legalább egy lány?

Megoldás: Képzeljük úgy a csoportok kialakítását, hogy a társaság tagjai névsor szerint egymás után húznak egy kalapból, amiben van három darab A, három darab B és három darab C betű. Az azonos betűt húzó emberek lesznek egy csoportban.

A jó esetekben három lány együtt van, ezt a három lányt $\binom{5}{3}$ módon választhatjuk ki, a betűjük háromféle lehet. A megmaradt két lány közül a névsorban előbb szereplő kétféle betűt kaphat. Az utolsó lány betűje már egyértelmű, a vele egy csoportba tartozó két fiút $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk, és ezzel ki is alakultak a csoportok. Minden választás független az előzőektől, így a szorzási szabályt alkalmazhatjuk. A jó esetek száma tehát

$$3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} = 360.$$ 3 pont

Az összes esetnek a feladat szövege alapján azokat kell tekintenünk, amelyeknél minden csoportban van legalább egy lány. Ez a jó eseteken kívül úgy lehet, ha a három csoportban a lányok aránya $2 : 2 : 1$, valamilyen sorrendben. Kiválasztjuk az öt lány közül, ki legyen egyedül és melyik betűt kapja, ez eddig $5 \cdot 3$. A megmaradó négy lány közül kiválasztjuk azt a kettőt, akik a megmaradt két betű közül az ábécé szerinti sorrendben előbbre levőt kapják, ez $\binom{4}{2}$ lehetőség. A fiúk közül kiválasztjuk, melyik kettő lesz abban a csoportban, ahol csak 1 lány van, ez $\binom{4}{2}$-féleképpen lehet. A megmaradt két fiú kétféleképpen csatlakozhat a 2-2 lányhoz. Most is a szorzási szabályt alkalmazva, ezen esetek száma

$$5 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 1080.$$

Az összes eset száma: $360 + 1080 = 1440$. 3 pont

A keresett valószínűséget a klasszikus modell szerint számoljuk, a jó esetek számát osztjuk az összes eset számával. A feladat kérdésére ezek alapján a válasz:

$$\frac{360}{1440} = \frac{1}{4}.$$ 1 pont

Megjegyzés: Az összes eset számát komplementer módszerrel is számolhatjuk. Ha a feltételt nem tekintjük, akkor a húzás után az összes lehetőségek száma $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$, hiszen megadjuk a kilenc közül melyik három kap A-t, majd a megmaradó 6 közül melyik három kap B-t. Ebből ki kell vonni azon esetek számát, amikor valamely csoportba nem kerül lány. Ez csak úgy lehet, ha az egyik betűből hármat, egy másikból pedig kettőt kapnak a lányok. Az előbbi betűt háromféleképpen, az utóbbit kétféleképpen választhatjuk. Most az öt lány közül kiválasztjuk, melyik három kapjon azonos betűt, ez $\binom{5}{3}$ lehetőség. A fiúk közül kiválasztjuk, melyik három kerüljön egy csoportba, ezek száma $\binom{4}{3}$.

Az összes eset száma $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} - 3 \cdot 2 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3} = 1440$.

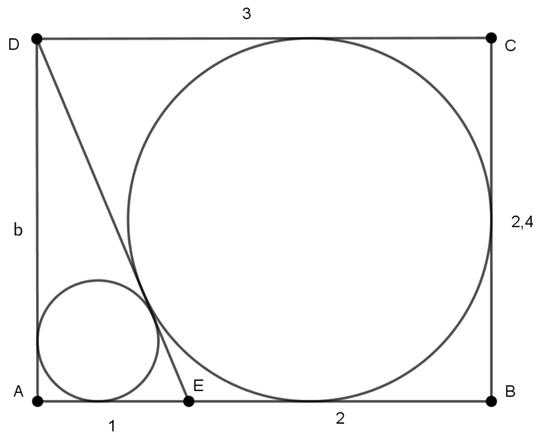
Összesen: 7 pont

3. feladat Az $ABCD$ téglalapra és az AB oldalán lévő E pontra az AED háromszög területe a téglalap területének a hatoda és $EBCD$ érintőnégyszög. Hogy aránylik egymáshoz az AED háromszög beírt körének és az $EBCD$ négyszög beírt körének területe?

Megoldás: Az AED területére vonatkozó feltétel szerint E az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. 1 pont

Legyen AE hossza egységnyi, ekkor $EB = 2$ és $CD = 3$. Legyen a téglalap AD oldala b, az $EBCD$ érintőnégyszögben $EB + CD = 5 = b + ED$, tehát $ED = 5 - b$. 1 pont

Az AED háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt $(5 - b)^2 = 1^2 + b^2$, amiből $b = 2,4$ és $ED = 2,6$. 1 pont



A derékszögű háromszög beírt körének a sugara a befogók összege és az átfogó különbségének a fele, ezért az AED beírt körének r_1 sugara $r_1 = \frac{2,4+1-2,6}{2} = 0,4$. 1 pont

Az $EBCD$ érintőnégyszög beírt körének r_2 sugara BC fele, azaz $r_2 = 1,2$. 1 pont

A körök területeinek aránya a sugaraik arányának a négyzete. 1 pont

Ezek alapján a kérdéses arány

$$\frac{0,4^2}{1,2^2} = \frac{1}{9}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletet, amelynek változói pozitív egész számok lehetnek:

$$15(abc + a + c) = 2024(bc + 1).$$

Megoldás: Az egyenletet átalakítva

$$15a(bc + 1) + 15c = 2024(bc + 1).$$

A $(bc + 1)$ osztója $15a(bc + 1)$-nek és $2024(bc + 1)$-nek, így a $15c$-nek is és így $15bc$-nek is. 1 pont

Ekkor

$$bc + 1 | 15(bc + 1) - 15bc, \quad \text{azaz} \quad bc + 1 | 15.$$ 2 pont

Mivel a változók pozitív egészek, a 15 osztóit tekintve bc értéke csak a 2, 4, 14 számok valamelyike lehet. 1 pont

Ha $bc = 2$, akkor az egyenletünk az alábbi lesz: $15(3a + c) = 6072$, ami lehetetlen, hiszen a bal oldal az 5-nek többszöröse, a jobb pedig nem. 1 pont

Ha $bc = 4$, akkor az egyenletünk az alábbi lesz:

$$15(5a + c) = 10120,$$

ami szintén lehetetlen, hiszen a bal oldal 3 többszöröse, a jobb oldal nem. 1 pont

Ha pedig $bc = 14$, akkor az egyenletünk az alábbi lesz:

$$15(15a + c) = 30360, \quad \text{amiből} \quad 15a + c = 2024.$$

Mivel $bc = 14$, így c legfeljebb 14 lehet, az imént kapott egyenlet alapján pedig c a 2024 15-ös maradéka. A 2024-et maradékosan osztva 15-tel: $2024 = 15 \cdot 134 + 14$, így $c = 14$, $a = 134$, $b = 1$. 1 pont

Egy megoldás van, az $(a; b; c) = (134; 1; 14)$ számhármas, ami valóban kielégíti az egyenletet.

Összesen: 7 pont.

5. feladat Egy nemzetközi konferencián 200 tudós vesz részt. Tudjuk, hogy mindegyikük legfeljebb négy nyelven beszél, továbbá bármely három tudós között van kettő, akik beszélnek közös nyelven. Bizonyítsuk be, hogy van olyan nyelv, amit a résztvevők közül legalább 26-an beszélnek.

Megoldás: Tegyük először fel, hogy van olyan tudós, aki mindenki mással tud beszélni. Mivel ő legfeljebb 4 nyelven beszél, így lesz 50 ember, akik beszélnek azonos nyelvet.

2 pont

Ha nincs olyan tudós, aki mindenkivel szót ért, akkor vegyünk két embert közülük, akik nem beszélnek közös nyelvet. Jelölje őket A és B. Bármely tőlük különböző C ember valamelyikkel tud beszélni, mégpedig az A, illetve B által beszélt maximum 8 nyelv valamelyikén.

2 pont

Skatulya elvet használunk, skatulyáink legyenek azok a nyelvek, amiket A, vagy B beszél. Így az A-tól és B-től különböző többi 198 tudóst beosztjuk legfeljebb 8 skatulyába. Így lesz 25, aki ugyanabba kerül. Ezen skatulyához tartozó nyelven így legalább 26 ember beszél, A és B közül az egyik, továbbá az említett legalább 25 tudós. 3 pont

Összesen: 7 pont.