A 2011/2012. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő fordulójának feladatai

II. kategória

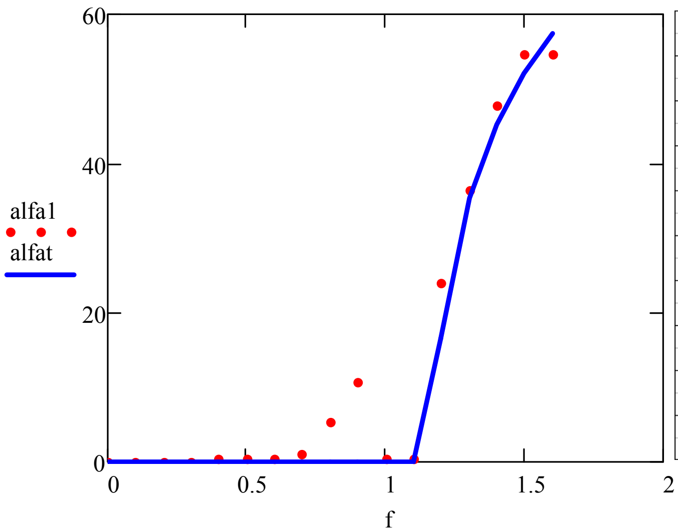
1. kérdés: Kezdetben a forgástengely és az inga tengelye metsszék egymást. Lassan változtassa a fordulatszámot, mindig megvárva amíg a stacionárius állapot beáll, azaz amíg az inga csak forog és nem leng. Adja meg és ábrázolja a kitérés szögét mint a fordulatszám függvényét!

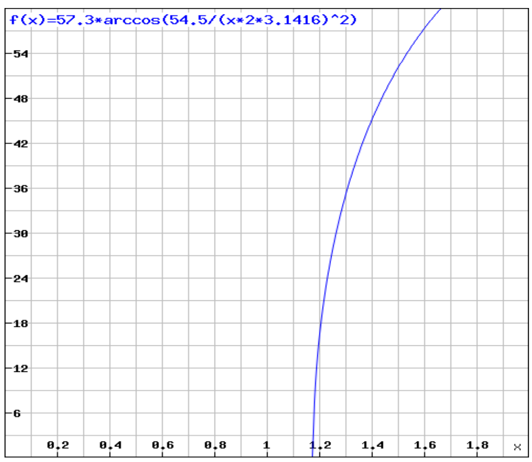
A frekvenciát célszerű 0,1 1/s-onként változtatni. A kitérés leolvasása azután történik, hogy beállt a stacionárius állapot. Ezt némely esetben nehéz megvárni, ezért is kell a frekvenciát lassan növelni. A forgás két szélét „könnyű" leolvasni úgy, hogy a derékszögű vonalzóval merőlegest állítunk, és így a skálára vetítjük a két értéket. Nagy kitérésnél a viszonylag rövid skálával az álló inga egyensúlyi helyzetétől célszerű mérni. A rúd hossza L = 27 cm. Erre egyrészt a szög kiszámításánál, másrészt az elméleti levezetésnél van szükségünk.
A mért értékeket a következő táblázat tartalmazza:

f(1/s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
s (cm)	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,5	2,5	0,5	0,2
α	0	0	0	0	0,4	0,4	0,4	1.1	5,3	10,1	0,4

f(1/s)	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
s (cm)	0,2	11	16	20	22	23
α	0,4	24,0	36,3	47,8	54,6	58,4

A kitérés szögét a fordulatszám függvényében a piros pontok mutatják a grafikonon.

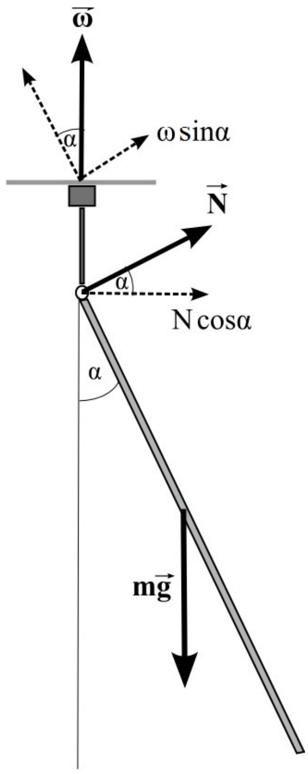




A leolvasás hibája ugyan csak mintegy 0,5 cm, de a hibát nagymértékben növeli, hogy a mozgás nem mindig stacionárius. Ez akkor zavaró a legjobban, mielőtt a görbe rohamosan emelkedni kezd,

mert ilyenkor a rendszer már egy kis amplitúdójú rezgés esetén is berezonál. Nyugodtan mondhatjuk, hogy a mérésnek 1 cm a hibája, ami szögben körülbelül 5°-nak felel meg.
A körülbelül 0,7 1/s-nál jelentkező instabilitás, azért lép fel, mert a léptető motor rezgése gerjeszti az ingát. Ebben a mérésben 1,0 és 1,1 1/s-os fordulatszámnál a rezonancia megszűnése miatt újra lecsökkent az inga kitérése. Ha a rezonancia figyelmen kívül hagyásával a mért értékekre szabadkézzel folytonos görbét rajzolunk, akkor a kék vonalat kaphatjuk meg.

2. és 3. feladat: Számolja ki elméletileg is a kitérés szögét a fordulatszám függvényében! Ábrázolja ezt az összefüggést is. Az inga hosszúságának figyelembevételével számadatokkal alátámasztva is hasonlítsa össze a kísérlet és a számolás eredményét és értelmezze a megfigyelt jelenséget!



A felfüggesztési pont pillanatnyi forgástengely. Erre a pontra (inercia rendszerben) csak a nehézségi erőnek van forgatónyomatéka: $M = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$. Ez a forgatónyomaték okozza a forgó inga perdületének időbeli megváltozását: $M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Először határozzuk meg az N perdületet, majd számítsuk ki a megváltozását. A forgató motor ω szögsebessége függőleges, ennek a rúdra merőleges összetevője: $\omega\sin\alpha$. A perdület vektor szintén merőleges a rúdra, és nagysága $N = \Theta\omega\sin\alpha$, ahol a tehetetlenségi nyomaték a rúd felfüggesztési pontjára vonatkozik: $\Theta = \frac{1}{3}ml^2$. Tehát a pillanatnyi perdület vektor nagysága $N = \frac{1}{3}ml^2\omega\sin\alpha$, iránya mindig merőleges a rúdra és a rúddal együtt körbe forog. Ennek a vektornak a függőleges összetevője nem változik, csak a vízszintes jár körbe. A perdület vektor vízszintes összetevője $N_{vízsz.} = \frac{1}{3}ml^2\omega\sin\alpha\cos\alpha$, ennek az időbeli megváltozását kell kiszámítanunk. Annak mintájára, hogy a körbejáró vezérsugár megváltozása (vagyis a sebesség) egyenletes körmozgás esetén a sugár és a szögsebesség szorzata, ugyanígy a perdület megváltozása szintén a szögsebességgel történő szorzással adható meg: $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$.
Végül alkalmazzuk a forgó mozgás dinamikai egyenletét ($M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$):

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

aminek két megoldása van: $\alpha = 0$ és $\cos\alpha = \frac{3g}{2l\omega^2}$.
Ha ábrázoljuk a szögkitérést a fordulatszám függvényében ($\omega = 2\pi f$), akkor az előző grafikontól jobbra lévő görbét kapjuk meg, ami nagyon jó egyezést mutat a mért értékekkel. Feltűnő, hogy a nem nulla szögkitérések görbéje pontosan merőlegesen indul a fordulatszám tengelyre, amit differenciálszámítással igazolhatunk is. Ha lett volna bátorságunk (vagy előzetes ismeretünk) a kék görbe merőleges indulásáról, akkor még pontosabb lenne a mérés és az elmélet egyezése.
Megjegyzések:

1. Az elméleti számítás azt mutatja, hogy amíg kicsi az ω, addig csak a nulla kitérés a rendszer megoldása, azonban amikor ω értéke annyira megnő, hogy a kitérés szögének koszinusza eléri az 1-et, akkor a nulla megoldás instabillá válik, és egy nem nulla szögkitérés lesz a stabil megoldás. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez éppen f_0 = 1,175 (1/s) fordulatszámnál következi be. Az ilyen jelenséget, amikor az egyetlen stabil megoldásból egy stabil és egy labilis megoldás alakul ki, bifurkációnak nevezzük. Utólag láthatjuk, hogy éppen az f_0 pontból kellett volna a kék görbét indítanunk, de hát utólag mindig könnyű okosnak lenni.

2. Intuitív módon megsejthetjük, hogy a kúpingaként körbejáró matematikai inga mintájára a

rúdinga szögsebessége is megegyezik a kúp magasságával megegyező hosszúságú rúd fizikai ingaként történő körfrekvenciájával:

$\omega^2 = \frac{mgs}{\Theta_{mag}}$,

ahol az *m* tömeg a rúd tömegével egyezik meg, az *s* távolság a redukált hosszúságú rúd tömegközéppontjának a felfüggesztési ponttól mért távolsága ($s = \frac{l}{2}\cos\alpha$), a Θ_{mag} tehetetlenségi nyomaték pedig a redukált rúd nyomatéka a felfüggesztési pontra:

$\Theta_{mag} = \frac{1}{3}m(l\cos\alpha)^2$.

Végezzük el a behelyettesítést: $\omega^2 = \frac{mg\frac{l}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{3}m(l\cos\alpha)^2} = \frac{3g}{2l\cos\alpha}$.

Örömmel állapíthatjuk meg, hogy intuíciónk nem csalt, az előző megoldással egyező eredményre jutottunk.

3. A rúd perdületvektorát nyers erővel is meghatározhatjuk a perdület definíciója alapján. Tömegpont esetén az egy pontra vonatkozó perdület: $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$, vagyis a perdület merőleges a helyvektorra és a lendületre. Ha felosztjuk a rudat kis darabokra, akkor minden kis darab sebessége egymással párhuzamos, merőleges a rúdra, és a vektoros ábrán az ábra síkjára merőleges. Tehát a teljes perdület vektor az ábra síkjában lesz, és éppen merőleges a rúdra, hiszen a végpontból induló helyvektorok mind rúdirányúak. Az összegzést a négyzetszámok összegének ismert formulája alapján végezhetjük el, majd a felosztást végtelenig finomítva megkapjuk az előzőekben is levezetett perdület nagyságot.

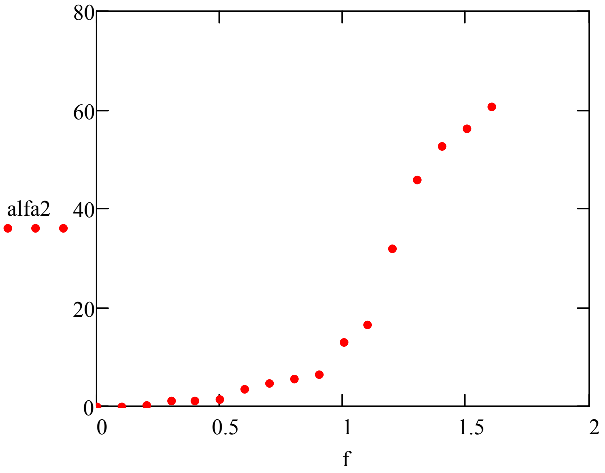
4. feladat. Állítsa be a forgástengely és az inga tengelye közti távolságot 10 mm-re és ismételje meg a mérést. Az előző esethez hasonlóan találhatunk egy olyan stabil megoldást, amikor a rúd kifelé tér ki. Azonban emellett egy másik állandósult állapot is létrehozható. Ezt a másik állapotot az ingát álló helyzetében a megadott drótkerettel enyhén befelé kényszerítve érhetjük el. Ennek kitérését csak 1,4 1/s vagy 1,5 1/s fordulatszámnál határozzuk meg!

Beszerelve az 1 cm-es excentricitást, már korábban is elkezd kitérni a rúd. A mért értékeket a táblázat tartalmazza:

f(1/s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
s (cm)	0	0	0,2	0,5	0,5	0,7	1,7	2,2	2,6	3,0	6,0
α	0	0	0,4	1,1	1,1	1,5	3,6	4,7	5,5	6,4	12,8

f(1/s)	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
s (cm)	7,5	14	19	21	22	23
α	16,1	31,2	44,7	51,1	54,6	58,4

Ezt az összefüggést mutatja az alábbi ábra. Megjegyezendő, hogy ebben az esetben a leolvasás nehezebb volt, az 1 cm-es excentricitást figyelembe kell venni.
A görbe hamarabb kezd emelkedni, mint az első esetben, és nem is olyan éles.



A másik stacionárius állapotot a megadott segítséggel sikerül elérni. A keret tartotta a rudat egészen 1,3 1/s-ig. A továbbiakban növelve a fordulatszámot, meglazult, majd le is esett a helyéről. Ekkor a fordulatszámmal kissé visszamenve megmérhetjük a kitéréseket. Ezeket a következő táblázat tartalmazza:

f(1/s)	1,4	1,5
s (cm)	17	19
α	39,0	44,7

Ezek az értékek kisebbek, mint az első stacionárius helyzet ugyanannál a fordulatszámnál. Ezt elméleti meggondolásokból láthatjuk be.