A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

II. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

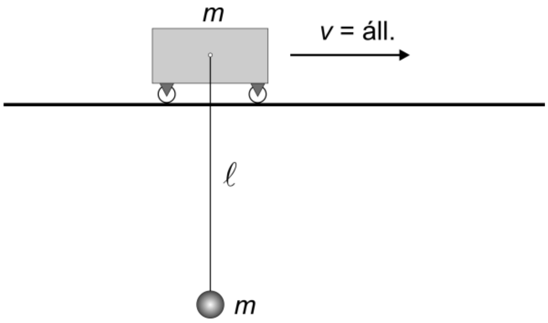
1.) *Vízszintes sínpáron könnyen gördülő,* m = 0,5 kg *tömegű kiskocsi közepéről lelógó* l = 0,8 m *hosszú fonál végén ugyancsak* m *tömegű, igen kisméretű golyó függ. A kiskocsit pillanatszerű indítás után állandó,* υ = 0,5 m/s *sebességgel húzzuk.*

a) A függőlegeshez viszonyítva maximálisan hány fokkal térül ki a fonál?

b) A maximális kitérés elérésekor mekkora erőt kell kifejtenünk a kiskocsira?

c) Az indítástól számítva mennyi idő telik el a maximális kitérésig?

(Minden súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.)



Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenletes sebességgel mozgatott kiskocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Ebben a rendszerben indításkor a fonálinga nehezéke υ vízszintes irányú sebességet kap. Így tehát meg kell határoznunk a meglökött fonálinga emelkedési magasságát, melyből a kitérés maximális szöge adódik.

a) Mivel ebben a rendszerben a fonálerő nem végez munkát, a munkatétel alapján érvényes:

$$mgl\left(1-\cos\alpha_0\right)=\frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

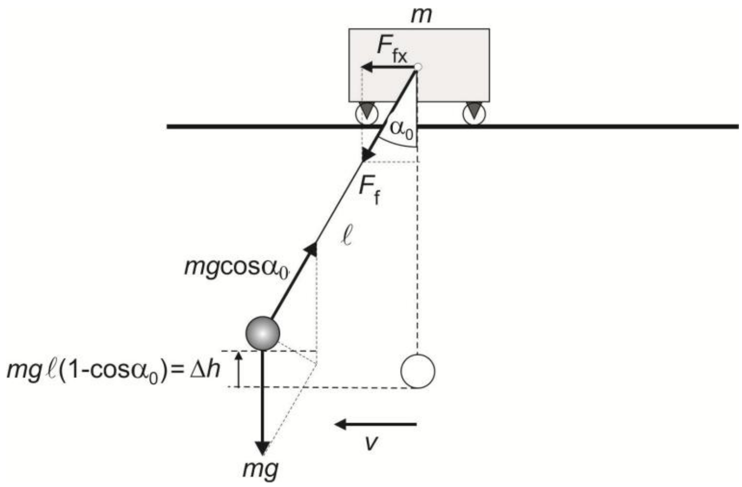
Innen $$\alpha_0=\arccos\left(1-\frac{\upsilon^2}{2gl}\right)=\arccos\left(1-\frac{0{,}5^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}8\ \mathrm{m}}\right)=\mathbf{10{,}24^\circ}\approx\mathbf{10^\circ}.$$

b) A kocsi egyenletes mozgatása ellenére erőt kell kifejtenünk rá, hogy ne gyorsuljon, ui. a kilendült inga „hátrafelé” húzva erőt fejt ki a kocsira. A kocsira ható függőleges erők eredője a sínek kényszerereje miatt minden pillanatban zérusra kompenzálódik, a vízszintes erők viszont nem, csak ha mi gyakoroljuk rá a keresett erőt.
A maximálisan kitérített, pillanatnyi nyugalomba került fonálinga fonalát feszítő erő:

$$F_\mathrm{f} = mg\cos\alpha_0,$$

amelynek vízszintes összetevője

$$F_\mathrm{fx} = mg\cos\alpha_0\sin\alpha_0,$$



ami fékezné a kiskocsit, tehát nekünk ekkora erőt kell ebben a pillanatban kifejteni az egyenletes sebesség megtartásához:

$$F_\mathrm{fx} = mg\cos\alpha_0\sin\alpha_0 = \frac{mg\sin 2\alpha_0}{2} = \frac{0{,}5\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin\left(2\cdot 10{,}24°\right)}{2} = \mathbf{0{,}858\ N \approx 0{,}9\ N}.$$

c) Mivel a kitérés szöge elég kicsi, igen jó közelítéssel alkalmazható a fonálinga egyszerű lengésidő-képlete. Az indulástól a szélső helyzetig egy negyed lengésidő telik el, ez pedig

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0{,}8\ \mathrm{m}}{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \mathbf{0{,}4486\ s \approx 0{,}45\ s.}$$

(Megjegyzés: tévhit, hogy csak 5^o-ig „elég pontos” a lengésidő képlet!)

2.) *Egy* ρ_{fa} = 500 kg/m^3 *sűrűségű,* R = 20 cm *sugarú fenyőfagömböt hosszú, vékony alumíniumhuzallal összekötöttünk egy* ρ_{vas} = 7,8 kg/dm^3 *sűrűségű,* r = 10 cm *sugarú vasgömbbel, majd ezt a rendszert az ábrán látható helyzetben, nyugodt légtérben igen magasról elengedjük úgy, hogy az elengedés pillanatában az összekötő huzal feszítetlen. A huzal keresztmetszete* A = 1 mm^2. *A levegő sűrűsége* ρ_{lev} = 1,29 kg/m^3.

Mozoghatnak-e egyenletesen egy idő után ezek a testek? Az alumíniumhuzal szakítószilárdsága σ = 200 MPa. *Az esetleges további szükséges adatokat a függvénytáblázatból vegyük.*

Megoldás. Induláskor a két gömb szabadon esik, ám sebességük növekedésével a közegellenállási erő rohamosan nő, fékezi a gömbök mozgását (az arkhimédészi felhajtóerő elhanyagolható). Amikor a közegellenállási erő a két gömbre ható nehézségi erő nagyságát eléri, a mozgás egyenletessé válik. A két gömböt összetartó huzalban ható erő biztosítja gömbök együttes mozgását. Amennyiben ez az erő nagyobb, mint amekkorát a huzal szakítószilárdsága megenged, a huzal elszakad, még mielőtt a rendszer egyenletes mozgása beállna.
Meghatározandó tehát a σ = 200 MPa szakító szilárdságú alumíniumban ható erő a feltételezett egyenletes mozgás létrejöttekor. (Megjegyzés: a vékony huzal azt jelenti, hogy a tömege elhanyagolható, a hosszú huzal azt jelenti, hogy az alsó gömb okozta örvények nem befolyásolják a felső gömb mozgását.)

Mozgásegyenleteink a már beállt egyenletes mozgás esetére, a felső és az alsó gömbre:

$$m_{\text{fa}} g - F_{\text{közeg,fa}} + K = 0,$$

$$m_{\text{vas}} g - F_{\text{közeg,vas}} - K = 0.$$

Beírva a megfelelő jellemzőket, végig paraméteresen számolva:

$$\rho_{\text{fa}} \frac{4R^3\pi}{3} g - k\frac{1}{2}\rho_{\text{lev}} R^2 \pi v^2 + K = 0, \tag{1}$$

$$\rho_{\text{vas}} \frac{4r^3\pi}{3} g - k\frac{1}{2}\rho_{\text{lev}} r^2 \pi v^2 - K = 0. \tag{2}$$

Itt k = 0,45 (táblázatból) a gömb alakállandója. Összeadva a két egyenletet:

$$\frac{4\pi}{3} g\left(\rho_{\text{fa}} R^3 + \rho_{\text{vas}} r^3\right) - k\frac{1}{2}\rho_{\text{lev}}\pi\left(R^2 + r^2\right)v^2 = 0.$$

Innen a kialakuló maximális egyenletes sebesség-négyzet:

$$v^2 = \frac{\frac{4\pi}{3} g\left(\rho_{\text{fa}} R^3 + \rho_{\text{vas}} r^3\right)}{k\frac{1}{2}\rho_{\text{lev}}\pi\left(R^2 + r^2\right)} = \frac{8}{3}\cdot\frac{g}{k}\cdot\frac{\left(\rho_{\text{fa}} R^3 + \rho_{\text{vas}} r^3\right)}{\rho_{\text{lev}}\left(R^2 + r^2\right)}.$$

Ezt pl. az (1) egyenletbe írva K-t kifejezzük:

$$K = R^2\pi\frac{4}{3}\cdot g\cdot\frac{\left(\rho_{\text{fa}} R^3 + \rho_{\text{vas}} r^3\right)}{\left(R^2 + r^2\right)} - \rho_{\text{fa}}\frac{4R^3\pi}{3} g = \frac{4\pi}{3} R^2 g\left(\frac{\left(\rho_{\text{fa}} R^3 + \rho_{\text{vas}} r^3\right)}{\left(R^2 + r^2\right)} - \rho_{\text{fa}} R\right).$$

Az adatok beírásával és a műveletek elvégzésével:

$$K = \frac{4\pi}{3} R^2 g \left(\frac{\rho_{\mathrm{fa}} R^3 + \rho_{\mathrm{vas}} r^3}{R^2 + r^2} - \rho_{\mathrm{fa}} R \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot 0,2^2\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \left(\frac{500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,2^3\,\mathrm{m}^3 + 7800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,1^3\,\mathrm{m}^3}{0,2^2\,\mathrm{m}^2 + 0,1^2\,\mathrm{m}^2} - 500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,2\,\mathrm{m} \right) \approx 228\ \mathrm{N}.$$

Az alumíniumhuzal által kifejthető maximális erő:

$$K_{\mathrm{max}} = \sigma A = 2 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2 = 200\ \mathrm{N}.$$

Tehát a huzal elszakad, még mielőtt a gömbök elérnék az egyenletes mozgás állapotát, tehát **nem mozoghatnak egyenletesen ezek a testek**!

Megjegyzések:

A gömbök lehetséges maximális sebessége erősebb fonál esetén:

$$v = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \frac{g}{k} \cdot \frac{\left(\rho_{\mathrm{fa}} R^3 + \rho_{\mathrm{vas}} r^3\right)}{\rho_{\mathrm{lev}}\left(R^2 + r^2\right)}} = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0,45} \cdot \frac{\left(500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,2^3\,\mathrm{m}^3 + 7800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,1^3\,\mathrm{m}^3\right)}{1,29\left(0,2^2\,\mathrm{m}^2 + 0,1^2\,\mathrm{m}^2\right)}} \approx$$

$$\approx 103,13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 371,29\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

A mi gömbjeink sebességét megkapjuk, ha felírjuk a mozgásegyenleteket a huzal elszakadása előtti pillanatra. (1) alapján, és figyelembe véve, hogy ekkor – bár kis mértékben – még gyorsulnak a testek:

$$\rho_{\mathrm{fa}} \frac{4R^3\pi}{3} g - k\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{lev}} R^2 \pi v^2 + K = m_{\mathrm{fa}} a,$$

$$\rho_{\mathrm{vas}} \frac{4r^3\pi}{3} g - k\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{lev}} r^2 \pi v^2 - K = m_{\mathrm{vas}} a.$$

Amíg a fonál nem szakad el, addig a két test gyorsulása azonos. A bal oldalon a tömegek beírásával kapjuk:

$$m_{\mathrm{fa}} g - k\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{lev}} R^2 \pi v^2 + K = m_{\mathrm{fa}} a,$$

$$m_{\mathrm{vas}} g - k\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{lev}} r^2 \pi v^2 - K = m_{\mathrm{vas}} a.$$

A gyorsulásokat kifejezve és egyenlővé téve, g-vel egyszerűsítve:

$$\frac{k\rho_{\mathrm{lev}} r^2 \pi v^2}{2m_{\mathrm{vas}}} + \frac{K}{m_{\mathrm{vas}}} = \frac{k\rho_{\mathrm{lev}} R^2 \pi v^2}{2m_{\mathrm{fa}}} - \frac{K}{m_{\mathrm{fa}}}.$$

Innen:

$$K\left(\frac{1}{m_{\mathrm{fa}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{vas}}}\right) = \frac{k\rho_{\mathrm{lev}} \pi v^2}{2}\left(\frac{R^2}{m_{\mathrm{fa}}} - \frac{r^2}{m_{\mathrm{vas}}}\right).$$

Innen:

$$v^2 = \frac{\dfrac{2K}{k\rho_{\text{lev}}\pi}\left(\dfrac{1}{m_{\text{fa}}} + \dfrac{1}{m_{\text{vas}}}\right)}{\dfrac{R^2}{m_{\text{fa}}} - \dfrac{r^2}{m_{\text{vas}}}} = \frac{2K}{k\rho_{\text{lev}}\pi} \cdot \frac{m_{\text{vas}} + m_{\text{fa}}}{m_{\text{vas}}R^2 - m_{\text{fa}}r^2}.$$

Innen a gömbök sebessége az elszakadás előtti pillanatban:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{k\rho_{\text{lev}}\pi} \cdot \frac{m_{\text{vas}} + m_{\text{fa}}}{m_{\text{vas}}R^2 - m_{\text{fa}}r^2}} = \sqrt{\frac{2K}{k\rho_{\text{lev}}\pi} \cdot \frac{\rho_{\text{vas}}r^3 + \rho_{\text{fa}}R^3}{\rho_{\text{vas}}r^3R^2 - \rho_{\text{fa}}R^3r^2}}.$$

Számadatainkkal (dimenziók nélkül):

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 200}{0,45\cdot 1,29\cdot \pi} \cdot \frac{\left(7800\cdot 0,1^3 + 500\cdot 0,2^3\right)}{\left(7800\cdot 0,1^3\cdot 0,2^2 - 500\cdot 0,2^3\cdot 0,1^2\right)}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 97,55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 351,17\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

ami valóban kisebb, mint az egyenletes mozgáshoz tartozó sebesség, vagyis a fonál valóban előbb szakad el, mint hogy elérnék a gömbök az egyenletes mozgás sebességét.

Az adatokból az elszakadás előtti közös gyorsulás is meghatározható. Asz elszakadás után a fagömb hirtelen fékezni fog, a vas gömb tovább gyorsul, és mindketten előbb-utóbb elérik az egymásétól különböző egyenletes sebességet.

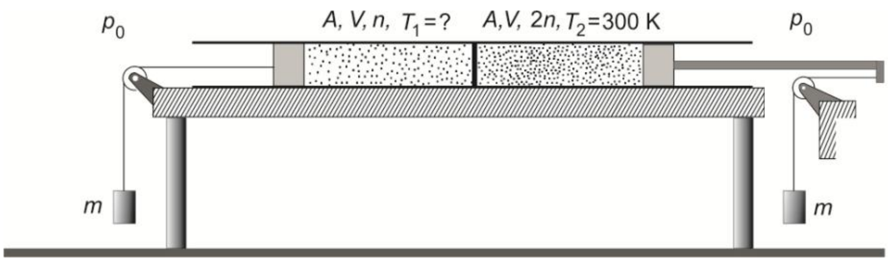
3) *Vízszintes helyzetű, rögzített, hőszigetelő falú,* A = 0,5 dm^2 *keresztmetszetű hengert mérsékelten jó hővezető anyagból készült, rögzített válaszfal oszt két részre. A hengerekben lévő, azonos V térfogatú oxigéngázt súrlódásmentesen mozgó, hőszigetelő anyagú dugattyúk zárják el a külső,* $p_0 = 10^5$ Pa *nyomású levegőtől. A bal oldali tartályban n, a jobb oldaliban* 2*n* mólnyi, T_2 = 300 K *hőmérsékletű oxigéngáz van. Egy csigán átvetett zsinór vízszintes része a bal oldali dugattyúhoz, függőleges része* m = 10 kg *tömegű testhez van rögzítve. A jobb oldali dugattyúhoz egy merev rúd van erősítve, melynek másik vége szintén vízszintes, csigán átvetett zsinórhoz csatlakozik az ábrán látható módon. Ennek a zsinórnak a végén is* m =10 kg *tömegű test függ. A rendszer mechanikai egyensúlyban van.*

a) Mekkora kezdetben a bal oldali tartályban lévő gáz T_1 *hőmérséklete?*

b) Mekkora lesz kiegyenlítődés után a közös hőmérséklet?

c) Mekkora a zsinórok végén függő testek által megtett utak aránya?

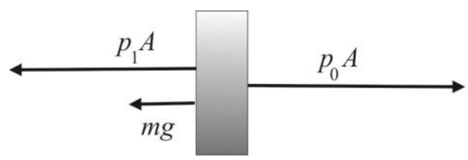
d) Mekkora a gázok belsőenergia-változásainak összege? Mekkora a gázok által végzett mechanikai munkák összege?



I. Megoldás.

a) A bal oldali dugattyú egyensúlya miatt

$$p_1A + mg = p_0A, \quad \text{tehát} \quad p_1 = p_0 - \frac{mg}{A}$$

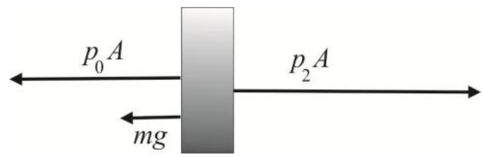


$$\frac{mg}{A} = \frac{100\,\text{N}}{5\cdot10^{-3}\,\text{m}^2} = 0{,}2\cdot10^5\ \text{Pa}.$$

Ezzel $p_1 = 0{,}8\cdot10^5$ Pa = állandó.

A jobb oldali dugattyú egyensúlya miatt

$$p_0A + mg = p_2A, \quad \text{tehát} \quad p_2 = p_0 + \frac{mg}{A}$$



Ezzel $p_2 = 1{,}2\cdot10^5$ Pa = állandó.

Az állapotegyenlet a bal oldali gázra $p_1V = nRT_1$,

a jobb oldalira $p_2V = 2nRT_2$.

A két egyenlet hányadosából

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{2T_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad T_1 = \frac{2p_1}{p_2} \cdot T_2 = \frac{2 \cdot 0{,}8}{1{,}2} \cdot 300\,\mathrm{K} = \mathbf{400\,K}.$$

Tehát a bal oldali részben a kezdeti hőmérséklet **400 K.**

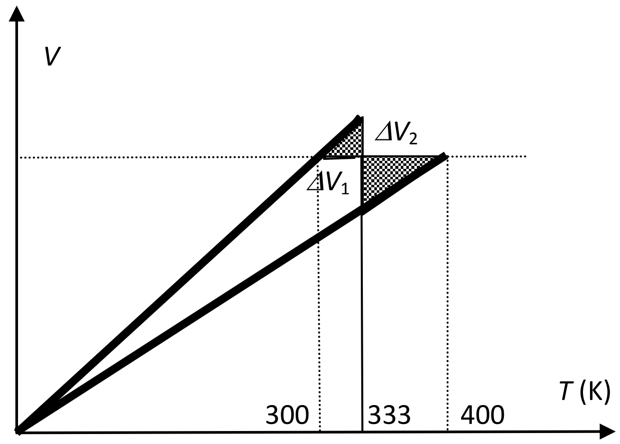
b) Mindkét oldalon állandó nyomáson megy végbe a kiegyenlítési folyamat. A melegebb gáz átad valamennyi hőt, a hidegebb ugyanennyit vesz fel. Ezért felírhatjuk a következő egyenletet:

$$|Q_{\mathrm{le}}| = C_{\mathrm{p}} n (T_1 - T) = C_{\mathrm{p}} 2n (T - T_2) = |Q_{\mathrm{fel}}|,$$

amiből $T = \frac{T_1 + 2T_2}{3} = \frac{400\,\mathrm{K} + 600\,\mathrm{K}}{3} = \mathbf{333K}$. (A közös hőmérséklet lényegében a kezdeti hőmérsékletek anyagmennyiséggel súlyozott átlaga.)

Tehát a közös hőmérséklet **333K.**

c) A folyamatok állandó nyomáson mennek végbe, így a térfogat egyenesen arányos az abszolút hőmérséklettel, továbbá az állandó keresztmetszet miatt a gáztérfogat hosszúsága a hőmérséklettel. Érdemes a folyamatokat térfogat-hőmérséklet grafikonon ábrázolni:



A grafikon alapján láthatjuk, hogy $\Delta V_2/\Delta T_2 = V/T_2$ és $\Delta V_1/\Delta T_1 = V/T_1$, amiből

$$h_1/h_2 = \Delta V_1/\Delta V_2 = (\Delta T_1 \cdot T_2)/(\Delta T_2 \cdot T_1) = (67 \cdot 300)/(33 \cdot 400) = 3/2.$$

Tehát a keresett arány **3:2**.

Ugyanezt az eredményt még egyszerűbben is megkaphatjuk, ha a barátságosan viselkedő számértékek alapján észrevesszük, hogy a meleg oldalon a térfogat csökkenés a kezdeti térfogat hatoda, míg a hideg oldalon a térfogat növekedés az ugyanakkora kezdeti térfogat kilencede. Tehát az elmozdulások aránya 9:6 = 3:2.

d) Az energia-változások összege

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = \frac{f}{2} nR(T - T_1) + \frac{f}{2} 2nR(T - T_2) = \frac{f}{2} nR(3T - T_1 - 2T_2),$$

a zárójelben lévő tényező pedig a kiszámított hőmérsékletek miatt nulla. *Tehát a gázok belsőenergia-változásainak összege* **nulla**.

Mivel a két gázból álló rendszerrel nem történt hőközlés, és a gázok energiaváltozásainak összege nulla, ezért a *gázok által végzett mechanikai munkák összege is* **nulla.**

Megjegyzések: Állandó mólhő esetén a hőközlés és a belső energia aránya meghatározott állandó (a mi esetünkben éppen 7/5 = 1,4). Ha tehát az egyik gáz ugyanannyi hőt ad le, mint amennyit a másik felvesz, akkor a lehűlő gáz belsőenergia-csökkenése éppen megegyezik a felmelegedő gáz belsőenergia-növekedésével.

A feladat átfogalmazható úgy is, hogy a kettős tartály függőleges helyzetű, melyben az alul és felül lévő dugattyúk 10 kg-osak. Aki ezt észrevette, az egy megszokottabb elrendezéssel dolgozhatott.

Megmutatható az is, hogy a külső levegő által végzett munka éppen megegyezik a zsinórokon függő testek (vagy fel-le mozgó dugattyúk) helyzeti energia növekedésével. A két gáz együttes térfogata csökken, a külső légnyomás munkája emeli fel a testeket.

II. Megoldás

a) A kezdeti állapotban írjuk fel a két oldalra az egyesített gáztörvényt, figyelembe véve, hogy az egyik oldalon a lelógó súly növeli, a másik oldalon pedig csökkenti a külső nyomást:

$$\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)V = 2nRT_2 \tag{1}$$

$$\left(p_0 - \frac{mg}{A}\right)V = nRT_1 \tag{2}$$

A két oldalt elosztva egymással a keresett T_1 hőmérséklet kifejezhető:

$$T_1 = 2\frac{p_0 - \frac{mg}{A}}{p_0 + \frac{mg}{A}} T_2 \tag{3}$$

Adatainkkal (A nehézségi gyorsulás értékét 10 m/s^2 -nek véve): $\boldsymbol{T_1}$ **= 400 K**.

b) Jelölje T a kiegyenlítődés utáni közös hőmérsékletet, illetve legyen ekkor a két oldalon a gázok térfogata V_1 és V_2. Mindkét oldalon a kiegyenlítődés lassú, és a kényszerek miatt izobár állapotváltozás történik a kezdeti és végállapotok között. Ezért:

$$\frac{T_1}{V} = \frac{T}{V_1}, \tag{4}$$

$$\frac{T_2}{V} = \frac{T}{V_2}. \tag{5}$$

Legyen ΔQ az a hőmennyiség, amelyik az 1. részből a 2. részbe a folyamat során hővezetéssel átmegy. Írjuk fel a két oldalra az I. főtételt (felhasználva, hogy a gázok állandó nyomás mellett változtatják a térfogatukat):

$$nC_{\mathrm{v}}\left(T-T_1\right)=-\Delta Q-\left(p_0-\frac{mg}{A}\right)\left(V_1-V\right), \tag{6}$$

$$2nC_{\mathrm{v}}\left(T-T_2\right)=\Delta Q-\left(p_0+\frac{mg}{A}\right)\left(V_2-V\right). \tag{7}$$

A két oldalt összeadva kapjuk

$$nC_{\mathrm{v}}\left[\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)\right]=-\left(p_0-\frac{mg}{A}\right)\left(V_1-V\right)-\left(p_0+\frac{mg}{A}\right)\left(V_2-V\right)$$

A jobb oldalt tovább alakíthatjuk a (4) és (5) egyenlet segítségével:

$$nC_{\mathrm{v}}\left[\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)\right]=-\left(p_0-\frac{mg}{A}\right)\left(\frac{TV}{T_1}-V\right)-\left(p_0+\frac{mg}{A}\right)\left(\frac{TV}{T_2}-V\right)=$$

$$=-\left(p_0-\frac{mg}{A}\right)\frac{V}{T_1}\left(T-T_1\right)-\left(p_0+\frac{mg}{A}\right)\frac{V}{T_2}\left(T-T_2\right).$$

A kapott egyenletben felhasználva (1)-et és (2)-t:

$$nC_{\mathrm{v}}\left[\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)\right]=-nR\left[\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)\right]. \tag{8}$$

Egy oldalra rendezve:

$$n\left(C_{\mathrm{v}}+R\right)\left[\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)\right]=0,$$

ahonnan látszik, hogy a közös hőmérsékletre fennáll, hogy $\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)=0.$

Kifejezve a közös hőmérsékletet:

$$T=\frac{T_1+2T_2}{3}. \tag{9}$$

Adatainkkal: $\boldsymbol{T}$ **= 333K.**

c) A megtett utak megkaphatók a gázok térfogatváltozásaiból (bal oldalon a térfogat csökken, jobb oldalon pedig nő):

$$h_1=\frac{V-V_1}{A}, \quad \text{és} \quad h_2=\frac{V_2-V}{A}.$$

A két magasság hányadosát a (4) és (5) egyenletekkel, majd a (9) közös hőmérséklettel tovább alakítva:

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{V-V_1}{V_2-V}=\frac{V-\frac{VT}{T_1}}{\frac{VT}{T_2}-V}=\frac{T_2}{T_1}\,\frac{T_1-T}{T-T_2}=2\frac{T_2}{T_1}.$$

Adatainkkal: $\frac{h_1}{h_2}=\mathbf{1{,}5.}$

d) A (8) egyenlet bal oldalán a gázok belső energia-változásának összege, jobb oldalon pedig a gázok által végzett mechanikai munkák összege áll. Mivel a közös hőmérsékletet abból a feltételből kaptuk, hogy $\left(T-T_1\right)+2\left(T-T_2\right)=0,$ ezért mindkét oldalon zérus áll, így a gázok belső energia-változásának összege is, és a gázok által végzett mechanikai munkák összege is **nulla**.

4) R = 10 cm *sugarú,* n = 1,5 *törésmutatójú üveggömb egyik sugarának valamelyik felezőmerőlegese irányából vékony fénysugár érkezik a gömbbe.*

a) Mekkora szöget zár be a belépő sugár iránya a kilépő sugár irányával?

b) Mennyi idő alatt fut végig a fény az üveg belsejében?

c) A beérkező fénysugár egyenesének a gömb középpontjától mért távolságát változtathatjuk. Legfeljebb mekkora lehet a belépő és a kilépő fénysugár által bezárt szög?

(A feladatban a belső visszaverődésektől tekintsünk el.)

Megoldás. *a)* Az ábrából látszik, hogy a beesési szög $\alpha = 30^{\circ}$. A törési törvény szerint:

$$\frac{\sin a}{\sin\beta} = n \quad\rightarrow\quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \quad\rightarrow\quad \beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} = \arcsin\frac{\sin 30^{\circ}}{1{,}5} = 19{,}47^{\circ} \approx 19{,}5^{\circ}.$$

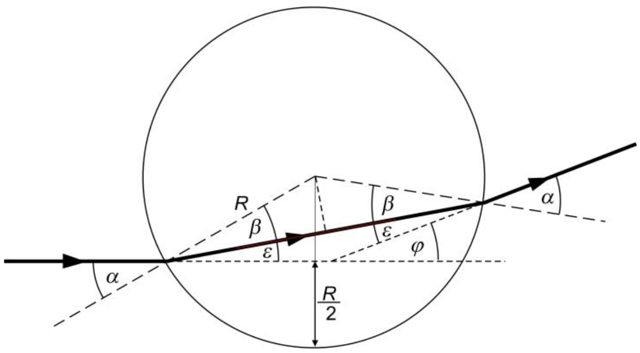
A szimmetria miatt a megtört sugár a gömb felületéhez érkezve a kilépéskor ugyanakkora törési szögben hagyja el a gömbfelületet, mint a beesés szöge volt. A második beesési szög pedig megegyezik az első törési szöggel.

A keresett φ szög az ábrán látható háromszög külső szöge, vagyis megegyezik a két belső szög (ε) összegével:

$$\varphi = 2\varepsilon$$

Az ε szög pedig a beesési és törési szögek különbsége:

$$\varepsilon = \alpha - \beta = 30^{\circ} - 19{,}47^{\circ} = 10{,}53^{\circ} \approx 10{,}5^{\circ}.$$



Így tehát a beeső és kilépő sugarak $\varphi = 2 \cdot 10{,}53^{\circ} = \mathbf{21{,}06^{\circ}} \approx 21^{\circ}$-os szöget zárnak be egymással.

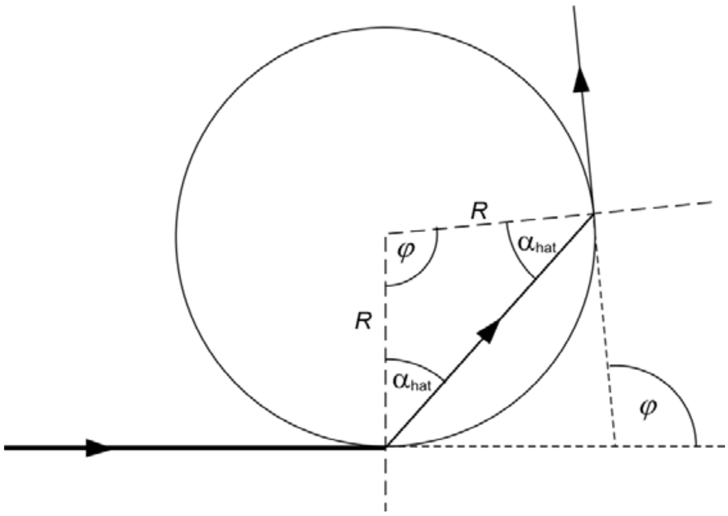
*b)*A fénysugárnak az üvegben megtett útja $s = 2R\cos\beta$. A törésmutató értelmezése szerint

$$n = \frac{c_0}{c_ü} \quad\rightarrow\quad c_ü = \frac{c_0}{n}.$$

A fénysugár futási ideje az üvegben tehát:

$$t = \frac{s}{c_ü} = \frac{2R\cos\beta}{\frac{c_0}{n}} = \frac{2nR\cos\beta}{c_0} = \frac{2\cdot 1{,}5\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}\cdot\cos 19{,}47^{\circ}}{3\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \mathbf{9{,}428\cdot 10^{-10}\,s \approx 0{,}943\,ns.} \approx 0{,}94\ \mathrm{ns}.$$

c) Amint távolítjuk a beeső fénysugár pályáját a gömb középpontjától, egyre nő a keresett szög. A középponton áthaladó sugár esetén ez 0. Amint közeledünk a sugár másik vége felé, egyre közeledik a beesési szög a 90^{o}-hoz. Természetesen a belépő sugár egyre energiaszegényebb, azaz halványul. Amikor éppen az érintőlegesen érkező fénysugár esetéhez érünk, a kép megfelel (a fénysugár útjának megfordíthatósága szerint) az üveggömbben határszögben érkező fénysugár esetéhez. Ekkor természetesen a kilépő sugár megszűnik, de tetszőlegesen kisebb szög esetén még van kilépő sugár. Ezt a határesetet keressük, ekkora φ_{max} szög már nem érhető el, de tetszőlegesen megközelíthető. Az ábra mutatja ezt a helyzetet.



Kiindulva a bentről kifelé haladó sugárra felírt törési törvényből:

$$\frac{\sin\alpha_{\text{hat.}}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \alpha_{\text{hat.}} = \arcsin\frac{\sin 90^\circ}{n} = \arcsin\frac{1}{1{,}5} = 41{,}81^\circ \approx 42^\circ.$$

A merőleges szárú szögek miatt az ábrán a középponti szög megegyezik a sugarak által bezárt szöggel, ami viszont az egyenlőszárú háromszög másik két szögének összegével csökkentett 180^{o}:

$$\varphi_{\text{max}} = 180^\circ - 2\alpha_{\text{hat.}} = 180^\circ - 2\cdot 41{,}81^\circ = \mathbf{96{,}38^\circ} \approx 96^\circ.$$

Ennél a szögnél biztosan nem lehet nagyobb a keresett szög, már ezt sem érheti el, de tetszőlegesen megközelítheti.

Értékelési útmutató

1. feladat.

a) Az alkalmas koordinátarendszer megadása (természetesen bármely más rendszer választásával adott helyes kiindulás is elfogadható)	5 pont
A keresett szög helyes megadása	5 pont
b) A kifejtendő erő helyes meghatározása	6 pont
c) A keresett idő kiszámítása	4 pont
Összesen:	20 pont

2. feladat.

A mozgásegyenletek helyes felírása	4 pont
Az egyenletes mozgáshoz tartozó sebesség meghatározása	3 pont
A fonálerő helyes meghatározása	10 pont
Az alumíniumhuzal által kifejthető maximális erő meghatározása	1 pont
A helyes válasz (nem mozoghatnak egyenletesen) megadása	2 pont
Összesen:	20 pont

3. feladat

a) T_1 helyes meghatározása	3 pont
b) A T közös hőmérséklet meghatározása	8 pont
c) A h_1/h_2 helyes megadása	5 pont
d) A belső energia-változások összege nulla	2 pont
A gázok által végzett mechanikai munkák összege nulla	2 pont
Összesen:	20 pont

4. feladat.

a) A beesési szög felismerése	2 pont
Az első törési szög meghatározása	3 pont
A beesési és törési szögek közötti kapcsolat felismerése	1 pont
A kilépő sugár irányának (φ) meghatározása	4 pont
b) A fény üveggömbben való futásideje a meghatározása	4 pont
c) A belépő és kilépő sugarak maximuma határszögének $(\varphi_{\max})$ megadása	6 pont
Összesen:	20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A nehézségi gyorsulás értékére 9,81 m/s^2 vagy 10 m/s^2 egyaránt elfogadható.