A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

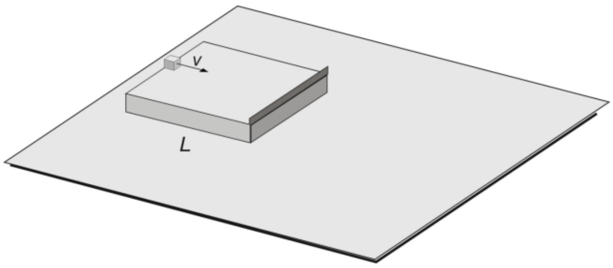
II. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat: *Súrlódásmentes, vízszintes felületen* L = 30 cm *élhosszúságú négyzet alapú, lapos, egyenes hasáb nyugszik. Egy pontszerűnek tekinthető testet a hasáb felső lapjára helyezünk az ábra szerint a hasáb hátsó élének középső pontjában. A hasáb homloklapján súlytalan ütköző található. A hasáb és a kis test tömege megegyezik, közöttük a súrlódási együttható értéke* μ = 1/3.

a) *Mekkora sebességgel kell a kis testet indítani, hogy eljusson az ütközőig?*
b) *Mekkora sebességgel kell a kis testet indítani, hogy tökéletesen rugalmas ütközés után visszafelé éppen végigcsússzon a hasábon, vagyis a kiindulási pontjában álljon meg a hasábon?*
c) *Ha a kis testet a b) kérdésbeli sebesség kétszeresével indítjuk, akkor a hasábhoz képest mekkora lesz a kis test relatív sebessége az elválás pillanatában?*

Megjegyzés: Feltételezhetjük, hogy az ütközési körülmények olyanok, hogy a hasáb egyik esetben sem billen meg.



Megoldás. *a)* Jelöljük az indítási sebességet v_a-val! Az eljutás feltétele az, hogy a hasáb elejére érve a hasáb és a kis test sebessége megegyezzen, a közös sebességet jelöljük u-val! Az impulzusmegmaradás és a munkatétel alkalmazható:

$$mv_a = 2mu\,, \tag{1}$$

$$2\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -\mu mgL\,. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből

$$v_a = 2\sqrt{\mu gL} \approx \mathbf{2\frac{m}{s}}.$$

adódik. Tehát akkor jut el a kis test az ütközőig, ha a kezdősebessége 2 m/s-nál nem kisebb.

Megjegyzés: Kinematikailag is megoldható a feladat, ha kihasználjuk, hogy a hasáb μg előre mutató gyorsulással, a kis test pedig ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú, $-\mu g$ gyorsulással mozog. A megtett útra és a közös sebességre a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{\mu g}{2}t^2 = v_a t - \frac{\mu g}{2}t^2 - L$$

$$v_a - \mu g t = \mu g t$$

Az idő kiküszöbölése után ugyanarra az eredményre jutunk, mint korábban.

Még egyszerűbben kaphatjuk meg a végeredményt, ha a hasábbal együtt mozgó koordináta-rendszert használjuk. Ebben a kist test gyorsulása $-2\mu g$, tehát a következő kinematikai egyenletet írhatjuk fel:

$$-v_a^2 = -2\cdot(2\mu g)\cdot L = -4\mu g L$$

ami közvetlenül megadja a határsebességet.

b) Ebben az esetben is lényegében ugyanaz történik, mint az *a)* kérdésnél. Közös sebesség alakul ki, ami az (1) egyenlet alapján most a kis test v_b -vel jelölt kezdősebességének a fele:.

$$u' = \frac{v_b}{2}.$$

A (2) egyenletet azzal a módosítással írhatjuk fel, hogy a súrlódási munka számításakor L helyett $2L$ kerül az egyenlet jobb oldalára:

$$2\frac{1}{2}mu'^2 - \frac{1}{2}mv_b^2 = -\mu mg2L.$$

Vegyük észre, hogy a hasáb elején található ütközőnek a belső erők és a tökéletesen rugalmas ütközés miatt nincs lényeges szerepe sem az impulzusmegmaradás, sem a munkatétel felírásában. Az u' végsebesség behelyettesítése után a következő végeredmény adódik:

$$v_b = \sqrt{8\mu g L} \approx \mathbf{2,8\frac{m}{s}}.$$

Megjegyzés: Ebben az esetben is megkaphatjuk a végeredményt kinematikai számítások alapján, a legegyszerűbben úgy, ha a hasábhoz rögzített koordinátarendszert használjuk. Mivel az ütközőről történő visszapattanáskor a kis test gyorsulása is, és a hasáb gyorsulása is előjelet vált, így a kis test gyorsulása a hasábhoz képest mindvégig $-2\mu g$, tehát lényegében az előző esethez hasonló egyenletet írhatjuk fel: $-v_b^2 = -2\cdot(2\mu g)\cdot 2L = -8\mu g L,$ amiből közvetlenül adódik a végeredmény.

c) Ebben az esetben a végállapotban (amikor a kis test elhagyja a hasábot) a két test sebessége különböző lesz. Legyen ekkor a kis test sebessége v_1, a hasábé pedig v_2, irányuk mutasson jobbra. A kis test kezdősebességét jelöljük v_c-vel ($v_c = 2v_b$). Most is érvényes az impulzusmegmaradás, illetve felírhatjuk a munkatételt:

$$mv_c = mv_1 + mv_2,$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_c^2 = -\mu mg2L.$$

Innen a sebességekre a következő kifejezések adódnak:

$$v_1 = \frac{v_c - \sqrt{v_c^2 - 8\mu g L}}{2} \qquad \text{(kis test)},$$

$$v_2 = \frac{v_c + \sqrt{v_c^2 - 8\mu g L}}{2} \qquad \text{(hasáb)}.$$

Megjegyzés: A másodfokú egyenlet két gyöke közül azért kell a fentieket használnunk, mert ha a kis test lecsúszik a hasábról, akkor a hasábnak kell nagyobb sebességgel rendelkeznie (pozitív előjel a gyök előtt), illetve a kis test lassabb (negatív előjel a gyök előtt).

A kis test relatív sebességét $v_{rel} = v_2 - v_1$ alakban kapjuk meg:

$$v_{rel} = v_2 - v_1 = \sqrt{v_c^2 - 8\mu g L}.$$

Ez az eredmény tetszőleges $v_c > v_b$ kezdősebességekre teljesül. (Láthatjuk azt is, hogy $v_c^2 = 8\mu g L = v_b^2$ esetén visszakapjuk a *b)* kérdés eredményét.) Helyettesítsük be a megadott $v_c = 2v_b = 2\sqrt{8\mu g L}$ értéket, és így megkapjuk a végeredményt:

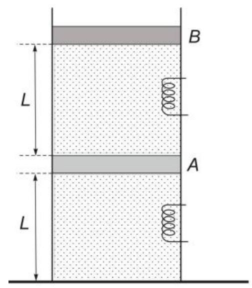
$$v_{rel} = \sqrt{4v_b^2 - 8\mu g L} = \sqrt{32\mu g L - 8\mu g L} = 2\sqrt{6\mu g L} \approx \mathbf{4{,}9\,\frac{m}{s}}.$$

Megjegyzés: A hasábbal együtt mozgó rendszerben az előzőeknek megfelelően írhatjuk fel a kinematikai összefüggéseket. Ebben a koordináta-rendszerben a hasáb sebessége mindig nulla, ezért a relatív sebesség megegyezik a kis test sebességével ($v = v_{rel}$):

$$v^2 - 4v_b^2 = -2\cdot(2\mu g)\cdot 2L,$$

amiből $v^2 = v_{rel}^2 = 24\mu g L$ adódik, egyezésben a fenti számolással.

2. feladat: *Asztalon álló, henger alakú hőszigetelt edényben a nagyon könnyű, hővezető A dugattyú és a nehéz, hőszigetelő B dugattyú két, egyenként* L = 0,4 m *hosszú térrészt zár be, melyek mindegyikében azonos anyagmennyiségű egyatomos, ideális gáz található. Kezdetben a rendszer termikus egyensúlyban van. A gázokat nagyon lassan melegítjük, összesítve a teljes hőközlés* Q = 200 J. *Mekkora a súrlódási erő az A dugattyú és a henger fala között, ha ez a dugattyú mozdulatlan marad? A B dugattyú súrlódás nélkül mozoghat.*



I. Megoldás. A termikus egyensúly miatt a két térrészben megegyezik a kezdeti hőmérséklet, és a nagyon lassú melegítés, valamint az *A* dugattyú hővezető tulajdonsága miatt a két térrészben mindig azonos lesz a hőmérséklet a későbbiekben is. A megegyező anyagmennyiség (mólszám), azonos térfogat, azonos kezdeti hőmérséklet miatt a két térrészben megegyező nagyságú a nyomás is, ezért a nagyon könnyű *A* dugattyúra kezdetben nem hat súrlódási erő.

Vegyük észre, hogy a hővezető A dugattyú miatt a rendszer olyan, hogy teljesen mindegy, hogy a hőközlés az alsó vagy a felső térrészben lévő fűtőszálakkal történik, vagy mindkettővel bármilyen megoszlásban. A súrlódás miatt beszoruló, mozdulatlan A dugattyú következtében az alsó térrészben a gáz állapotváltozása állandó térfogaton történik (izochor folyamat), míg a súrlódás nélkül elmozduló B dugattyú miatt a felső térrészben a nyomás állandó (izobár folyamat).

A fentiek alapján mindkét gáz hőmérsékletváltozása azonos, tehát a rendszerrel közölt teljes hő a két gáz között a gázok állandó térfogaton, illetve állandó nyomáson vett mólhőinek az arányában oszlik meg:

$$Q = C_{\mathrm{V}} n\Delta T + C_{\mathrm{p}} n\Delta T = \frac{3}{2} Rn\Delta T + \frac{5}{2} Rn\Delta T = 200\ \mathrm{J}.$$

Láthatjuk, hogy a két egyatomos gáz között a teljes hő 3:5 arányban oszlik meg. A fenti egyenletből kiszámíthatjuk az $Rn\Delta T$ szorzatot, amire $Rn\Delta T = 50$ J adódik.

A melegítés közben a felső gáz nyomása nem változik (csak a térfogata nő), míg az alsó gáz térfogata marad állandó, azonban nyomása Δp-vel növekszik: $(\Delta p)V = (\Delta p)(AL) = nR\Delta T$, ahol A a dugattyúk keresztmetszetének területe. Az S súrlódási erő a nyomáskülönbség és a dugattyúterület szorzataként határozható meg:

$$S = (\Delta p)A = \frac{nR\Delta T}{L} = \frac{50\ \mathrm{J}}{0{,}4\ \mathrm{m}} = \mathbf{125\ N}.$$

II. Megoldás. A feladat megoldható úgy is, ha a két térrészben lévő gáz állapotváltozását követjük nyomon, illetve a hőtan első főtételét használjuk. Legyen a gázok kezdeti hőmérséklete T_1, így a gázok kezdeti állapotegyenlete:

$$p_1 V_1 = nRT_1,$$

ahol

$$V_1 = LA, \quad p_1 = p_0 + \frac{Mg}{A},$$

továbbá A a dugattyúk keresztmetszeti területe, M a felső dugattyú tömege, n a mólok száma.

Jelöljük a végső hőmérsékletet T_2-vel (ez mindkét gáz esetén ugyanakkora, mert az alsó dugattyú jó hővezető). Az alsó gáz esetében a folyamat állandó térfogaton zajlik (izochor folyamat), ezért a végső nyomás:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

A felső gáz esetében a nyomás változatlan (izobár folyamat), ezért a végső térfogat:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

A közölt hő a két gáz belsőenergia-változására fordítódott, valamint fedezte a felső gáz tágulási munkáját:

$$Q = 2 \cdot \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) + p_1(V_2 - V_1).$$

Vegyük észre, hogy $nR(T_2 - T_1) = p_1(V_2 - V_1)$, hiszen a felső gáz állapotváltozása állandó nyomáson történik. Ezért a közölt hő kifejezése így alakítható:

$$Q = 4p_1(V_2 - V_1) = 4p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 4p_1 LA \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

A kérdéses súrlódási erő a két térrészben lévő gázok nyomáskülönbségéből származik, ami így írható fel és alakítható át:

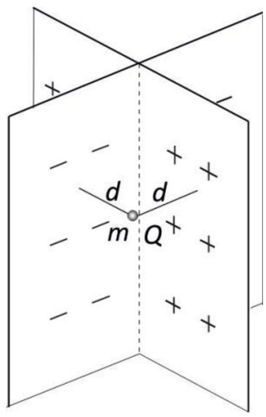
$$S = (\Delta p)A = (p_2 - p_1)A = p_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)A.$$

Osszuk el a hőre kapott kifejezést a súrlódási erő képletével (a hányados hosszúság dimenziójú kell, hogy legyen):

$$\frac{Q}{S} = 4L,$$

és végül fejezzük ki ebből a súrlódási erőt: $S = \frac{Q}{4L} = \mathbf{125\ N}$.

3. feladat: *Két nagyméretű, egymásra merőleges, vékony, függőleges helyzetű szigetelő lap mindkét oldalán a felületi töltéssűrűség mindenhol azonos nagyságú, amelynek az értéke az egyik lap mindkét oldalán $+\sigma$, míg a másikon mindkét oldalon $-\sigma$. Az ábrának megfelelően, a lapok szélétől távol, mindkét síktól d távolságra elhelyezünk egy pozitív töltésű, pontszerű testet.*



a) Melyik lemezt és az indítás után mennyi idővel éri el először a magára hagyott, kezdősebesség nélkül induló m tömegű, Q pozitív töltésű test?

b) Határozzuk meg az indítási pont és a becsapódás helye közti távolságot!

Megjegyzés: A közegellenállás hatásától tekintsünk el.

Megoldás. *a)* A Gauss-tétel segítségével külön-külön meghatározhatjuk az egyes lemezek által létrehozott, a lemezekre merőleges irányú, homogén elektromos mező térerősség vektorainak a nagyságát:

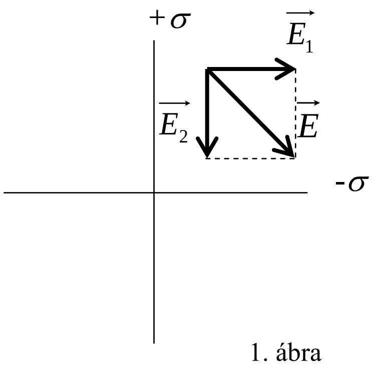
$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Az egyes tér-negyedekben homogén elektromos mező alakul ki, ahol a térerősség vektor vízszintes irányú, nagyságát és irányát a szuperpozíció elve alapján határozhatjuk meg az 1. ábrának megfelelően:

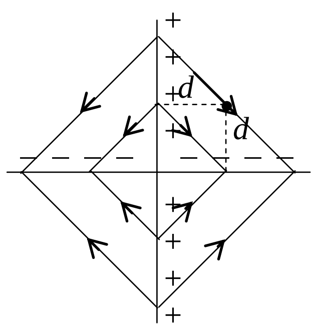
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

$$E = \sqrt{2}E_1 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\varepsilon_0}.$$

A kialakuló elektromos mező felülnézeti erővonal képét a 2. ábra szemlélteti, az erővonalak 45°-os szöget zárnak be a síkokkal:



1. ábra



2. ábra

A mozgás vízszintes irányban a homogén elektromos mező miatt egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló, míg függőleges irányban szabadesés. Jelölje a_x a vízszintes irányú gyorsulást.

$$EQ = ma_x$$

$$a_x = \frac{EQ}{m} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot Q}{\varepsilon_0 m}.$$

A vízszintes irányú elmozdulás nagyságát a lemez eléréséig jelöljük x-szel ($x = \sqrt{2}d$), t-vel pedig a becsapódásig eltelt időt.

Az állandó nagyságú gyorsulás miatt:

$$x = \frac{a_x}{2} t^2.$$

Rendezéssel és behelyettesítéssel:

$$t^2 = \frac{2x}{a_x} = \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{2}\sigma Q} \varepsilon_0 m = \frac{2\varepsilon_0 md}{\sigma Q}.$$

Tehát a negatív töltésű lemezt éri el először az elektromosan töltött, pontszerű test az elengedés után

$$t = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 md}{\sigma Q}}$$

idővel.

b) A t idejű szabadesésből meghatározható, hogy mekkora h mélységben éri el először a pozitív töltésű test a negatív töltésű lemezt:

$$h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{\varepsilon_0 mgd}{\sigma Q}.$$

Eközben a test vízszintes irányú elmozdulása $\sqrt{2}d$, tehát az indítási pont és a becsapódási hely közötti L távolság:

$$L = d \cdot \sqrt{2 + \left(\frac{\varepsilon_0 mgd}{\sigma Q} \right)^2}.$$

Megjegyzés: Természetesen azoknak a számítása is teljes értékű, akik $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ -val számoltak, ha egyébként helyesen dolgoztak.

4. feladat: *Sík-domború lencse* n = 1,5 *törésmutatójú üvegből készült, síklapjának átmérője* D = 5 cm. *A domború gömbfelület sugara* R = 5 cm. *A lencse domború oldala mögött, az optikai tengelyre merőlegesen egy ernyő helyezkedik el. Az ernyőt azon a helyen rögzítették, ahol az optikai tengely mentén a lencsére beeső igen keskeny fénynyaláb az ernyőn a legkisebb átmérőjű foltot adja. Ezután a lencse sík felületére az optikai tengely irányából olyan széles párhuzamos fénynyalábot bocsátunk, amely a teljes lencsét megvilágítja.*

Határozzuk meg a széles fénynyaláb esetén a fényfolt átmérőjét az ernyőn!

Megoldás. Bár a feladatban szereplő sík-domború lencse nem vékony, hanem vastag lencsének számít, azonban az optikai tengely mentén haladó vékony fénysugár esetében a leképezésben csak a lencse domború felületének kicsiny középső tartománya vesz részt. Ilyenkor a rendszert egy sík-párhuzamos (plán-parallel) lemeznek és egy vékony lencsének tekinthetjük. A vizsgált fénysugarat a sík-párhuzamos lemez nem téríti el, tehát ekkor a fókusztávolságot a következő, vékony lencsékre érvényes formula alapján számíthatjuk ki:

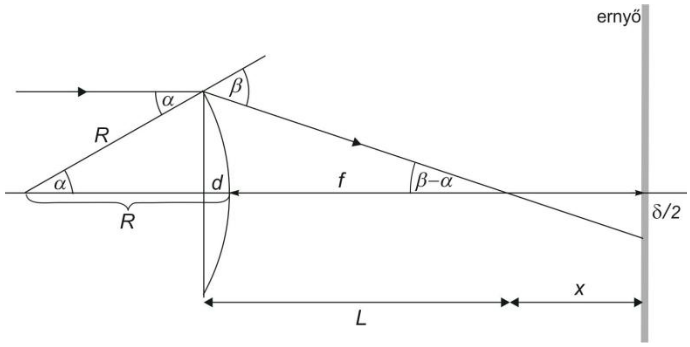
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

amiből $R_1 = R$ és $R_2 = \infty$ behelyettesítésével kapjuk meg a fókusztávolságot:

$$f = \frac{R}{n-1} = 10 \text{ cm.}$$

Így megállapíthatjuk, hogy az ernyőt a lencsétől f távolságra helyezték el (lásd még a megoldás végén lévő *Megjegyzés*t).

A lencse elhelyezkedése a megoldás szempontjából egyszerűnek mondható. A széles, párhuzamos nyaláb merőlegesen esik a lencse sík felületére, így ott nem törik meg, ezért törést számítani a csak a félgömb - levegő határánál kell.



Tekintsük az optikai tengelytől legtávolabbi sugarat, amint azt az ábra mutatja. Vegyük észre, hogy a beesési merőleges éppen a gömbfelület sugara, és fedezzük fel, hogy a beesési szög $\alpha = 30°$:

$$\sin \alpha = (D/2)/R = 0{,}5.$$

A β törési szög a törési törvény alapján:

$$\sin \beta = n \sin \alpha = 0{,}75, \quad \text{azaz} \quad \beta = 48{,}6°.$$

Keressük meg, hogy a vizsgált fénysugár a lencse síklapjától mekkora L távolságra halad át az optikai tengelyen:

$$L = (D/2) \text{ ctg } (\beta - \alpha) = 7{,}43 \text{ cm.}$$

Szükségünk van a lencse optikai tengelyen mért d vastagságára:

$$d = R(1 - \cos 30°) = 0{,}67 \text{ cm.}$$

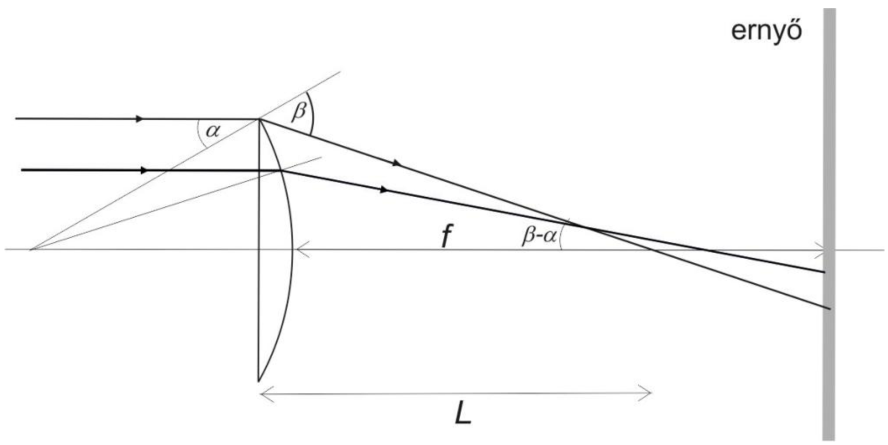
A lencse vastagságát is figyelembe véve megkaphatjuk, hogy szélső sugarak a törés után az optikai tengelyt

$$x = f + d - L = 3{,}24 \text{ cm}$$

távolságra metszik az ernyőtől. Csúcsszögek egyenlőségét figyelembe véve, a fényfolt átmérőjére

$\delta = 2x$ tg $(\beta - \alpha)$ = **2,2 cm** adódik.

A következő ábra szerint láthatjuk, hogy szélső sugár adja a folt külső határát, az optikai tengelyhez közelebb haladó sugarak az ernyőhöz közelebb metszik az optikai tengelyt.



Megjegyzés: Az ernyő helyzetét nemcsak a vékony lencsékre érvényes formula alapján kaphatjuk meg, hanem közvetlenül is kiszámíthatjuk. Az optikai tengelyhez nagyon közel haladó sugarakra a számításban alkalmazhatjuk a tg $\alpha \approx$ sin $\alpha \approx \alpha$ közelítést.
Így a gömbfelületnél a törésre $\beta \approx n\alpha$ adódik, a metszési pont távolsága pedig a gömb-felülettől

$$L' = \frac{R \sin\alpha}{\mathrm{tg}\ (\beta - \alpha)} \approx \frac{R\alpha}{\beta - \alpha} \approx \frac{R\alpha}{n\alpha - \alpha} = \frac{R}{n-1} = f = 10 \text{ cm}.$$

Pontozási útmutató

1. feladat

a) A feltétel értelmezése	1 pont
Az egyenletek felírása	2 pont
A paraméteres számítások elvégzése	2 pont
A végeredmény numerikus megadása	1 pont
b) A feltétel értelmezése	1 pont
Az egyenletek felírása	2 pont
A paraméteres számítások elvégzése	2 pont
A végeredmény numerikus megadása	1 pont
c) A feltétel értelmezése	1 pont
Az egyenletek helyes felírása	3 pont
A paraméteres számítások elvégzése	3 pont
A végeredmény numerikus megadása	1 pont
	Összesen 20 pont

2. feladat

A rendszer viselkedésének helyes felismerése	5 pont
A hőközlés helyes felírása	4 pont
A gáz állapotváltozásának helyes felírása	4 pont
A súrlódási erőre vonatkozó összefüggés felírása	3 pont
A paraméteres számítások hibátlan elvégzése	3 pont
A súrlódási erő numerikus értékének megadása	1 pont
	Összesen 20 pont

3. feladat

Az egyes lemezek által kialakított homogén elektromos mező térerősség vektorainak nagyság és irány szerinti megadása	4 pont
Szuperpozíció elvének alkalmazása, a kialakuló elektromos mező jellemzése	4 pont
Annak felismerése, hogy a mozgás vízszintes és függőleges irányú, egyenletesen változó mozgások összetételeként jön létre	3 pont
A vízszintes irányú gyorsulás meghatározása	2 pont
A vízszintes irányú elmozdulás megadása	1 pont
A becsapódás idejének (vagy négyzetének) meghatározása	2 pont
A függőleges irányú elmozdulás kiszámítása	2 pont
Az indítás és a becsapódás helye közötti távolság megadása	2 pont
	Összesen 20 pont

4. feladat

Az ernyő távolságának megadása a lencsétől (indoklás nélkül 2 pont)	5 pont
Jó ábra a sugármenetekről, szögekkel, és távolságokkal	3 pont
A szélső sugármenet jelentőségének felismerése, a beesési és törési szög meghatározása	5 pont
A lencse vastagságának megadása az optikai tengelyen	2 pont
A fényfolt átmérőjének meghatározása	3 pont
További sugármenet rajza, illetve indoklás arról, hogy a szélső sugár adja a legnagyobb foltot	2 pont
	Összesen 20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A nehézségi gyorsulás értékére 9,81 m/s^2 vagy 10 m/s^2 egyaránt elfogadható, hacsak a feladat máshogy nem rendelkezik.