1. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_1fel)
Hány olyan pozitív egész tízes számrendszerbeli n-jegyü szám van, amelynek számjegyösszege n^3 - 40, ahol n pozitív egész szám?
1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_1fel_1mego)
A számjegyek összege legalább 1, és legfeljebb 9n. Tehát: $1 \le n^3 - 40 \le 9n$.
A bal oldali egyenlötlenségböl:

$$n^3 \geq 41$$

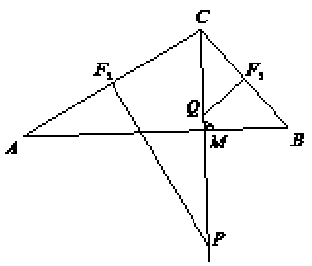
$$n \geq \sqrt{41} > 3$$

Ezek szerint n nem lehet kevesebb 4-nél.
A jobb oldali egyenlötlenségböl:

$$n^3 - 9n \leq 40$$

n=4-re: n^3-9n=28
n=5-re: n^3-9n=80
Mivel n^3-9n=(n-3)n(n+3), így ha n-et növeljük, akkor mindhárom tag nöni fog, és így a szorzatuk is (poz. n-re). Valamint n^3-9n folytonos függvény, amely így szigorúan monoton nö, ezért a 40-et csupán egyszer veszi fel.
Ezért n nem lehet több 4-nél.
A két megállapításból következik, hogy a keresett szám csak négyjegyü lehet. Ekkor a számjegyek összege 24.
Keressük meg az összes olyan 4 nemnegatív tagú összeget, ahol a tagok növekvö sorrendben vannak, és az összeg 24. (A tagok egészek)
Az elsö ilyen a 9+9+6+0. A következö a 9+9+5+1. A 9+9 kezdetüekböl az utolsó 9+9+3+3. Ezután folytatjuk a 9+8 kezdetüekkel. Az utolsó 9 kezdetü a 9+5+5+5. A 8 kezdetüekkel folytatjuk. Az utolsó számnégyes a 6+6+6+6. Összesen 39 számnégyes van. Egy számnégyesböl legfeljebb 4!=24 db négyjegyü szám állítható elö, ha 4 különbözö számjegy van, és nincs köztük 0-ás. 18 db szám (3·3·2·1) ha van 0-ás és 4 különbözö. 2 egyforma számjegy van, és van 0-ás, akkor 9 db, ha nincs, akkor 12 db. 2-2 egyforma számjegy van, akkor nincs 0; 4 alatt a 2= 6db szám. Ha 3 egyforma, és van 0-ás, akkor 3db; ha nincs, 4db. 4 egyforma számjegyböl csak 1 szám állítható össze. Ez összesen 405 db számot ad.

1. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_2fel)
ABC háromszögben *BC* < *CA* < *AB*. A *BC* oldal felezömerölegese Q-ban, az *AC* oldal felezömerölegese P-ben metszi a C-böl induló magasság egyenesét. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha $4PC \cdot CQ = AB^2$?
1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_2fel_1mego)



$F_1CQ\,\Delta$ hasonló az $MBC\Delta$ -hez, hiszen C-nél lévö szögük közös, valamint mindkettö derékszögü. Innen:

$$\frac{F_1C}{CQ} = \frac{CM}{BC},\ F_1C = \frac{BC}{2}$$

miatt

$$2CQ=\frac{BC^2}{CM}.$$

Hasonlóképpen elmondható, hogy F_2PC ∆ hasonló *AML* ∆-höz, amiből rövid számolás után:

$$2CP=\frac{AC^2}{CM}$$

adódik.
Összeszorozva a két egyenletet:

$$4\cdot CP\cdot CQ=\frac{AC^2\cdot BC^2}{CM^2},$$

azaz az eredeti feltétel szerint

$$\frac{AC^2\cdot BC^2}{CM^2}=AB^2.$$

$AC^2\cdot BC^2=AB^2\cdot CM^2$ ahol nyilván a jobb oldal a terület kétszeresének négyzete.
Tehát $AC\cdot BC=2T$, vagyis *AC* és *BC* bezárt szöge 90, ami szükségszerüen az *ABC* háromszög legnagyobb szöge.

1. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_3fel)

Tekintsük az 1,2,3,...,2002 számsorozatot! Ezt a sorozatot átrendezhetjük a következö módon: egy lépésben a sorozat utolsó tagját elöbbre helyezhetjük (akárhányadik helyre az 1.,2.,3.,...2002. sorszámú hely közül) azzal a megszorítással, hogy az elörébb helyezett tag nem elözhet meg nála nagyobb számot. A kapott új sorozatra ismét alkalmazható az elöbb leírt lépés, egészen addig, amíg lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy bármely lépés után olyan sorozatot kapunk, amelyben a (2k - 1)-edik és a 2k-adik tag közül az egyik páros a másik pedig páratlan szám, bármely $1 \leq k \leq 1001$ esetén.

1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_IIkat_3fel_1mego)

Ha a 2002-t elöbbre helyezzük, akkor még egyszer nem kerülhet utolsónak, hiszen kisebb szám nem kerülhet nagyobb elé. Hasonlóan minden számot maximum egyszer helyezhetünk elörébb. Ezért véges sok lépés után már nem lehetséges áthelyezés. Képzeljük a számokat kettesével egy skatulyába, az elsöbe az 1 és a 2, ... az utolsóba a 2001 és a 2002 kerül. Minden skatulya, melybe tehetö a 2002, páratlan számmal kezdödik. Ha 0 2002-t áthelyezzük valamelyik skatulyába, abban a 2002-n kívül egy db páratlan szám lesz, és azok a skatulyák, melyekbe a következö lépésben a 2001-be rakható párossal kezdödnek és páratlannal végzödnek. Innen ugyan úgy folytatható az eljárás, mint az elöbb, így minden lépés után minden skatulyában egy páros és egy páratlan szám lesz.