Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2001–2002-es tanév
első forduló
Haladók – III. kategória
(speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

Megoldás. A feltétel miatt $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $a+b+c\neq 0$. A nevezőkkel beszorozva $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$, amit nullára rendezve és a hatványai szerint csoportosítva

$$0=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$$

adódik. 2 pont

Elvégezve a lehetséges kiemeléseket:

$$0=(b+c)\left[a^2+a(b+c)+bc\right]=(b+c)(a+b)(a+c).$$ 2 pont

Tehát valamelyik két változó egymás ellentettje, ezen változók páratlan egész kitevős hatványai is egymás ellentettjei, amiből következik a bizonyítandó egyenlőség, 2 pont

amelynek mindkét oldala értelmezett a kiinduló feltételek mellett. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az a oldalú N négyzetet a középpontja körül elforgatva az N' négyzetet kapjuk. A két négyzet közös része olyan nyolcszög, amelynek mindegyik oldala b hosszú.

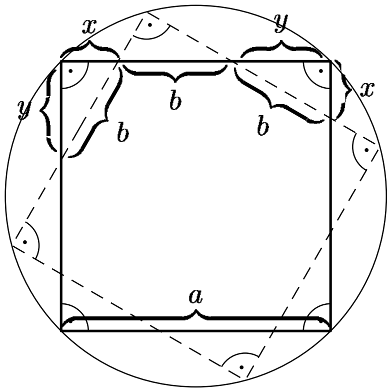
a) Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel!

b) Ha az N és N' négyzet metszetének területe t, uniójának területe pedig T, akkor igazoljuk, hogy $\sqrt{t\cdot T}<a^2<\sqrt{\frac{t^2+T^2}{2}}$.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát!

Az ábra jelölései alapján egyrészt $a-b=x+y$, másrészt Pitagorasz tétele alapján $x^2+y^2=b^2$. 1 pont

A két egyenlet összevetéséből $(a-b)^2-b^2=a^2-2ab=2xy$ adódik.



Így $T_\cap = a^2 - 2xy = a^2 - (a^2 - 2ab) = 2ab.$ 2 pont

Hasonlóan adódik, hogy $T_\cup = a^2 + 2xy = 2a^2 - 2ab$.

Mivel a feladat jelölései szerint $T_\cap = t = 2ab$ és $T_\cup = T = 2a^2 - 2ab$, ezért azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{2ab(2a^2 - 2ab)} < a^2 < \sqrt{\frac{4a^2b^2 + 4a^2(a-b)^2}{2}}.$$

A bal oldali egyenlőtlenség négyzetre emelés és rendezés után a $0 < (2b - a)^2$ egyenlőtlenséggel ekvivalens, ami nyilvánvalóan helyes. 2 pont

A jobb oldali egyenlőtlenség szintén négyzetre emelés és rendezés után ugyancsak a $0 < (2b - a)^2$ egyenlőtlenséghez vezet, ami helyes, mert $b = \frac{a}{2}$ nem lehetséges. 2 pont

Összesen: 7 pont

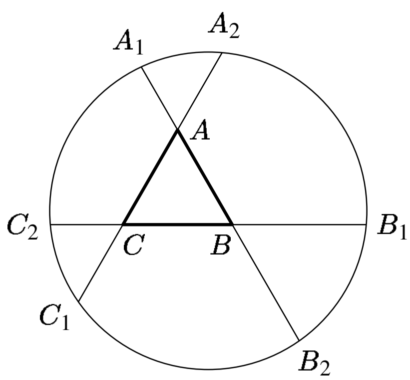
Megjegyzés. Az a) rész helyes megoldásáért 3 pont adható, a b) rész bizonyításának eseteiért a maximálisan adható 2-2 pont a bizonyítás teljességének teljesítése szempontjából 1-1 pontra lebontható.

3. A k kör belsejében levő ABC szabályos háromszög oldalegyenesei a k kört az A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pontokban metszik a következő betűzés szerint:

az AB oldalegyenes metszéspontjai a körrel A_1 és B_2. Hasonlóan: a BC egyenes metszetei a körrel B_1, illetve C_2, és a CA egyenes metszetei a körrel C_1, illetve A_2 az ábrának megfelelően.

Bizonyítsuk be, hogy

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2.$$



Megoldás. Jelölje x az ABC szabályos háromszög oldalainak hosszát. Ekkor az A csúcsnak a körre vonatkozó hatványa kétféle módon történő felírásából (vagy az AA_1A_2 és AB_2C_1 háromszögek hasonlóságából :

$$AA_2 \cdot AC_1 = AA_1 \cdot AB_2.$$ 2 pont

Átalakítva:

$$AA_2 \cdot (x + CC_1) = AA_1 \cdot (x + BB_2).$$ 1 pont

Ugyanezt felírva a B és C csúcsra:

$$BB_2(x + AA_1) = BB_1(x + CC_2),$$

illetve

$$CC_2(x + BB_1) = CC_1(x + AA_2).$$ 2 pont

Ezt a három egyenletet összeadva

$$x(AA_2 + BB_2 + CC_2) + AA_2 \cdot CC_1 + BB_2 \cdot AA_1 + CC_2 \cdot BB_1 =$$
$$= x(AA_1 + BB_1 + CC_1) + AA_1 \cdot BB_2 + BB_1 \cdot CC_2 + CC_1 \cdot AA_2$$ 1 pont

adódik.

Az összevonások után x-szel egyszerűsítve éppen a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. 121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

Megoldás. Tegyük fel, hogy a 121 darab pozitív egész számnak egy-egy egységnyi sugarú körcikket feleltetünk meg úgy, hogy a körcikk középponti szögének fokokban mért értéke éppen az adott pozitív egész szám legyen. A feladat feltétele szerint ekkor a 121 darab körcikk középponti szögének összege fokokban mérve éppen 360°.

A körcikkeket egymás mellé másolva egy teljes egységnyi körlapot kapunk. 2 pont

Színezzük kékre a kapott egységnyi sugarú kör kerületén a körcikkeket határoló pontokat! Jelöljük be például piros színnel az összes további olyan pontot a kerületen, amelyek a kékre színezett pontokból fokokban mérve egész számú fokkal történő elforgatással kaphatók. Így összesen 360 bejelölt pont lesz a kör kerületén, amelyek közül 121 darab kék színű, a többi piros. 1 pont

A feladat állításának igazolásához elég azt megmutatni, hogy a kör kerületén megjelölt 360 pont közül kiválasztható 3 darab olyan, amelyek egy szabályos háromszög csúcsai, és e csúcsok közül legalább kettő kék színű.

Hiszen ekkor a két kék színű csúcs által meghatározott középponti szög 120°, illetve 240°. 2 pont

A bejelölt 360 pont 120 db olyan szabályos háromszög 3-3 csúcsa, amelyeknek nincs közös csúcsuk (hiszen egy szabályos háromszög és ennek 1°, 2°, …, 119°-os elforgatottjainak csúcsai adják ki a pontokat). 1 pont

Mivel 121 kék pontunk van, a skatulyaelv szerint kell lennie olyan szabályos háromszögnek, amelynek legalább két csúcsa kék színű, ezzel pedig állításunkat igazoltuk. 1 pont

Összesen: 7 pont