Országos Közoktatási,
Értékelési és Vizsgaközpont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003–2004-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – III. kategória
(speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely p és q pozitív prímszámra és n egész számra teljesül az $n^2 = p^2 + q^2 + p^2q^2$ összefüggés?

Megoldás. Ha p és q is páratlan prímszám, akkor a jobb oldal 4-gyel osztva 3 maradékot ad, hiszen egy páratlan szám négyzetének 4-es maradéka 1.

n^2 viszont nem adhat 4-gyel osztva 3 maradékot, így p és q valamelyikének értéke 2. — 2 pont

Ha például $p = 2$, akkor $n^2 = 5q^2 + 4$.

Ekkor $n^2 - 4 = 5q^2$ alapján $(n-2)(n+2) = 5q^2$.

Mivel $n - 2 < n + 2$, ezért csak a következő esetek lehetségesek:

$n-2$	$-5q^2$	-5	$-5q$	1	q	5
$n+2$	-1	$-q^2$	$-q$	$5q^2$	$5q$	q^2

, — 1 pont

ahol $n^2 = 5q^2 + 4$ alapján q csak páratlan prím lehet.

Az egyes esetekben $(n+2)-(n-2) = 4$ alapján rendre $5q^2 - 1 = 4$, $5 - q^2 = 4$, $4q = 4$, $5q^2 - 1 = 4$, $4q = 4$, $q^2 - 5 = 4$ adódik. — 1 pont

A felírt esetek alapján csak az utolsó lehetséges, azaz $q^2 = 9$, ekkor pedig $q = 3$. — 1 pont

Ha most $q = 3$, akkor $n^2 = 49$, így $n = \pm 7$.

Ekkor tehát $p = 2$, $q = 3$, $n = \pm 7$, így a megoldások szimmetriáját is figyelembe véve:

p	2	2	3	3
q	3	3	2	2
n	7	-7	7	-7

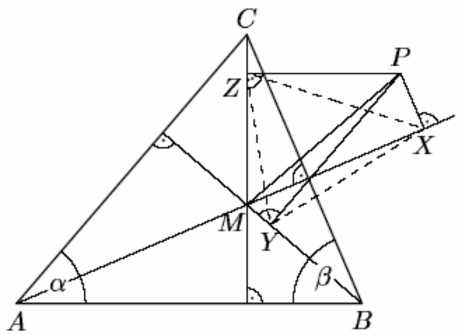
. — 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Hiányos (nem teljes) végeredményért a feladat megoldására legfeljebb 5 pont adható.

2. Az ABC háromszög síkjának tetszőleges P pontjából a háromszög magasságvonalaira állított merőlegesek talppontja X, Y és Z. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit:



Mivel $MXP\sphericalangle = MYP\sphericalangle = MZP\sphericalangle = 90°$, ezért X, Y és Z rajta van az MP szakasz Thalész-körén. 1 pont

Így az M, Y, X, P, Z pontok egy körön vannak. 1 pont

A $PZMY$ négyszög húrnégyszög volta miatt $YPZ\sphericalangle + ZMY\sphericalangle = 180°$, mert a szemközti szögek összege $180°$.

A $BMC\sphericalangle$ és a $BAC\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, mégpedig úgy, hogy összegük $180°$, így
$ZMY\sphericalangle = 180° - BAC\sphericalangle = 180° - \alpha$. 1 pont

A $PZYX$ négyszög is húrnégyszög, ezért $YPZ\sphericalangle = YXZ\sphericalangle$, hiszen az YZ oldal a másik két csúcsból azonos szög alatt látszik. 1 pont

Így az $MYXZ$ húrnégyszög YXZ szöge α, hiszen

$$ZMY\sphericalangle + YPZ\sphericalangle = ZMY\sphericalangle + YXZ\sphericalangle = 180° - \alpha + YXZ\sphericalangle = 180°.$$ 1 pont

Teljesen hasonló módon adódik, hogy $XZY\sphericalangle = \gamma$ és $XZY\sphericalangle = \beta$. 1 pont

A szögek egyezése alapján pedig az ABC és az XYZ háromszögek hasonlósága már bizonyított. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív számok összege 5. Határozzuk meg az

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$$

összeg maximumát!

Megoldás. Az $A = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$ jelöléssel legyen x_k az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számok közül a legnagyobb szám vagy a legnagyobbak egyike, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5$. 1 pont

Ha $k = 1$, akkor

$$A \le x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_1).$$

Mivel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$, ezért

$$A \le x_1(5 - x_1).$$ 1 pont

Felhasználva, hogy $x(5-x) = \frac{25}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$, $A \le \frac{25}{4}$ adódik. 1 pont

Ha $k = 5$, akkor az előző esethez hasonló módon

$$A \le x_5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = x_5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_5) = x_5(5 - x_5) \le \frac{25}{4}.$$ 1 pont

Ha pedig k értéke 2, 3 vagy 4, akkor

$$A \le x_k(x_1 + \ldots + x_{k-1}) + x_k(x_{k+1} + \ldots + x_5) =$$
$$= x_k(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_k) = x_k(5 - x_k).$$

Ekkor is igaz, hogy $A \le \frac{25}{4} - \left(x_k - \frac{5}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$. 1 pont

A $\frac{25}{4}$ maximális érték el is érhető, például úgy, hogy az öt szám közül két szomszédosat $\frac{5}{2}$-nek választunk, a többi értékét pedig 0-nak.

Egy konkrét megvalósítás az $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ választás. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Az 1-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány különböző 15-tel osztható 15-jegyű pozitív egész szám állítható elő, ha két 5-ös nem lehet szomszédos?

Megoldás. $15 = 3 \cdot 5$ alapján az utolsó számjegy csak 5 lehet, előtte csak 1-es állhat, és a számjegyek összege osztható 3-mal.

A számjegyösszeg x darab 5-ös esetén: $5x + (15 - x) \cdot 1 = 15 + 4x$. Így x értéke csak $3k$ alakú lehet. De $x > 8$ nem lehetséges a szomszédosság elkerülésének alapján, ezért x értéke 3 vagy 6 lehet. 1 pont

I. $x = 3$

$$\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square}_{13 \text{ db hely}}\boxed{1}\boxed{5}$$

A még üresen hagyott 13 helyre 3 darab 5-ös és 11 darab 1-es számjegyet kell megfelelően sorbarakni úgy, hogy két 5-ös ne kerüljön egymás mellé. A 11 darab 1-es sorában így a két 5-ös számára 12 hely maradt (az első 1-es előtt, bármelyik kettő között és az utolsó 1-es után), ebből kell kettőt kiválasztani, ahova az 5-ösöket tesszük. Ez $\binom{12}{2} = 66$ lehetőség. 3 pont

II. $x = 6$, ekkor a 13 üres helyre 5 darab 5-ös és 8 darab 1-es számjegyet kell sorbarakni megfelelően. Ismét az 1-esek sorában összesen 9 helyre tehetjük az 5 darab 5-öst, ez $\binom{9}{5} = 126$ lehetőség. 2 pont

Összesen tehát $\binom{12}{2} + \binom{9}{5} = 66 + 126 = 192$ megfelelő 15-jegyű szám állítható elő. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

Néhány megfelelő szám megadásáért – a teljességre való törekvést figyelembe véve – maximum 2 pont adható.