

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Feladatok

1. Kincskereső műszerünk hatósugara d méter. (A műszer d sugarú környezetében lévő kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CA = 50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

2. Adott 17 darab pozitív egész szám, amelyek prímosztói a pozitív p, q, r, s prímszámok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy a 17 szám közül kiválasztható két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

3. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}})^4} + \frac{1}{(1 - \sqrt{1 + \sqrt{x}})^4} + \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}})^3} + \frac{2}{(1 - \sqrt{1 + \sqrt{x}})^3} = 0.$$