Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
2. forduló
haladók II. kategória

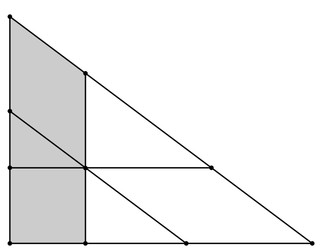
Megoldások és javítási útmutató

1. Kincskereső műszerünk hatósugara d méter. (A műszer d sugarú környezetében lévő kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CA = 50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges háromszög alakú tartomány esetén akkor lehetünk biztosak a kincs észlelésében, ha műszerünk hatósugara legalább akkora, mint a beírt kör sugara. (Jelöljük ezt a távolságot r-rel.) 1 pont

A beírt kör középpontja minden oldalegyenestől r távolságra van, ezért az oldalszakaszok pontjaitól legalább r távolságra van, vagyis ez a hatótávolság szükséges. 2 pont



Ha a beírt kör középpontján át párhuzamost húzunk valamelyik oldallal, akkor egy olyan trapéz alakú tartományt vágunk le a háromszögből, melynek pontjai az oldalszakaszról „bemérhetők”. (Vagyis a tartomány mindegyik pontjához van olyan pontja az oldalszakasznak, hogy a két pont távolsága legfeljebb r.)

A három oldalhoz tartozó három trapéz együtt lefedi az eredeti háromszög teljes területét, tehát egy r hatósugarú műszer minden esetben elegendő. 2 pont

A konkrét példában a beírt kör sugara a terület kétféle felírásából kiszámítható:

$$T = \frac{AB \cdot BC}{2} = r\frac{AB + BC + CA}{2} \implies r = 30 \cdot 40/120 = 10 \text{ m}.$$

Tehát d legkisebb megfelelő értéke 10 méter. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Adott 17 darab pozitív egész szám, amelyek prímosztói a pozitív p, q, r, s prímszámok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy a 17 szám közül kiválasztható két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

Megoldás. Mind a 17 darab szám alakja a feltételek szerint $p^x \cdot q^y \cdot r^z \cdot s^u$, ahol x, y, z, u természetes szám, de egyszerre nem 0 értékűek.

Az $(x; y; z; u)$ kitevőnégyes megfelelő tagja helyére írjunk 1-est, ha a kitevő páratlan, 0 számjegyet pedig akkor, ha a kitevő páros. 1 pont

Így összesen 16-féle $(x; y; z; u)$ típusú számnégyes készíthető, hiszen x, y, z és u helyére kétféle (1 vagy 0) számjegyet írhatunk. 1 pont

A 16 darab lehetőségnek megfelelően készítsünk a 16-féle számnégyessel címkézett dobozokat!

Most tegyük egy-egy dobozba a 17 szám mindegyikét pontosan aszerint, hogy az adott szám p, q, r, s prímkitevői rendre milyen számnégyest határoznak meg. 1 pont

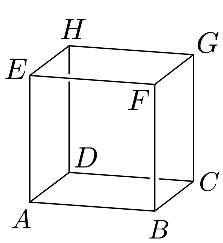
Mivel 16 dobozunk és 17 darab számunk van, ezért lesz olyan doboz, amelyikbe legalább két szám kerül. 1 pont

Két darab egy dobozba kerülő szám szorzata viszont biztosan négyzetszám, hiszen mindkét szám megfelelő prímkitevői azonos paritásúak, így az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság alapján a két szám szorzatában mindegyik prímkitevő páros hatványon fog előfordulni. 2 pont

Ha pedig mindegyik prím kitevője páros a szorzatban, akkor a szorzat négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

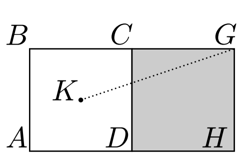
3. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!



Megoldás. Jelölje a kocka $ABCD$ lapjának középpontját K! Bebizonyítjuk, hogy K-ra teljesül a feladat állítása. 1 pont

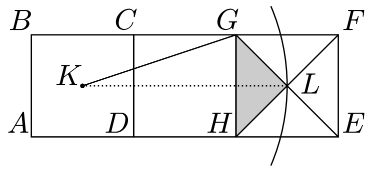
Három esetet különböztetünk meg.

Ha a célpont az $ABCD$ lap pontja, akkor legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$ távolságra van K-tól. 1 pont



Ha az $ABCD$-vel szomszédos lapok pontjaiba akarunk eljutni, akkor a legnagyobb távolság

$$KG = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} < 2.$$ 2 pont



Végül legyen a célpont az $ABCD$-vel szemközti lapon. A szemközti lapot átlóival négy egybevágó háromszögre bonthatjuk, ezek közül legalább az egyik tartalmazza az elérendő pontot, például GHL. Ekkor a $CGHD$ lapon keresztül elérhető GHL minden pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton.

A KL távolság most pontosan kettő, és a GHL többi pontja közelebb van K-hoz, mint L, mert a K középpontú, KL sugarú kör belsejében tartalmazza a G és H pontokat. ($KG < 2$) 3 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}=0.$$

Megoldás. Az egyenlet az $x > 0$ feltétel esetén értelmezhető. Az $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ jelöléssel $-\sqrt{x} = 1 - y^2$, ahol $|y| > 1$. Egyenletünk így

$$\frac{1}{(1+y)^4}+\frac{1}{(1-y)^4}+\frac{2}{(1+y)^3}+\frac{2}{(1-y)^3}=0$$

alakú. 2 pont

Az első és a második két tagot közös nevezőre hozva

$$\frac{(1-y)^4+(1+y)^4}{(1-y^2)^4}+2\cdot\frac{(1-y)^3+(1+y)^3}{(1-y^2)^3}=0$$

adódik, ahonnan az

$$\frac{\left[(1-y)^2+(1+y)^2\right]-2(1-y^2)^2}{(1-y^2)^4}+2\cdot\frac{2\cdot\left[(1-y)^2-(1-y)(1+y)+(1+y)^2\right]}{(1-y^2)^3}=0$$

formulát kapjuk.

Mivel $(1-y)^2+(1+y)^2=2(y^2+1)$ és $(1-y)^2-(1-y)(1+y)+(1+y)^2=1+3y^2$, ezért az egyenlet a következő:

$$\frac{4(y^2+1)^2-2(1-y^2)^2}{(1-y^2)^4}+4\cdot\frac{1+3y^2}{(1-y^2)^3}=0.$$ 2 pont

Az $1 - y^2 = -\sqrt{x}$ helyettesítésnek megfelelően a kapott egyenlet

$$\frac{4\left(2 + \sqrt{x}\,\right)^2 - 2x}{x^2} + 4 \cdot \frac{4 + 3\sqrt{x}}{-x \cdot \sqrt{x}} = 0$$

alakú. 1 pont

Rendezéssel pedig (x^2-tel való szorzás után)

$$16 + 16\sqrt{x} + 2x - 16\sqrt{x} - 12x = 0$$

adódik, ahonnan összevonás után $16 = 10x$, azaz $x = 1{,}6$ adódik. 1 pont

Mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre az adott értelmezés esetén, ezért az egyenlet egyetlen gyöke $x = 1{,}6$. 1 pont

Összesen: 7 pont