

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2005/2006 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló**

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

**1. feladat**

Az  $a$  és  $b$  valós számra  $a^2+b^2=1$  teljesül, ahol  $ab \neq 0$ . Határozzuk meg az

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$$

szorzat minimumát.

**2. feladat**

Az  $AB$  alapú egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja  $F$ , súlypontja  $S$ , magasságpontja  $M$ , beírt köre  $k$ . Ha  $FM = \sqrt{6}$  és  $S$  illeszkedik  $k$ -ra, akkor mekkora a háromszög kerülete?

**3. feladat**

A Piramis Bank elnöke a külvárosból jár be munkahelyére dolgozni. Hétköznapokon egy sofőr jön érte, aki minden nap ugyanabban az időpontban indul a banktól, felveszi az elnököt, és pontosan nyitásra megérkeznek. Egyik reggel a sofőr telefonált, hogy valami baj van az autóval, ezért valószínűleg késni fog. Az elnök emiatt a szokottnál egy órával korábban, gyalog indult munkába. A sofőr közben megjavította az autót, és mégis el tudott indulni a szokásos időpontban, így útközben találkozott a bankárral. Felvette, és nyitás előtt 20 perccel érkeztek a bankhoz.

Mennyi ideig sétált a bankár? (Feltehetjük, hogy az autó sebessége állandó és az utas felvétele nem jár idővesztéssel.)

**4. feladat**

Egy  $ABC$  hegyesszögű háromszög belsejében egy tetszőleges  $O$  pontból merőlegeseket bocsátunk az  $AB$ ,  $BC$  és  $CA$  oldalakra. A talppontokat rendre jelöljük  $R$ -rel,  $P$ -vel és  $Q$ -val. Rajzoljunk kifelé négyzeteket az  $RB$ -re,  $PC$ -re és  $AQ$ -ra.

Mekkora a három négyzet területének összege, ha tudjuk, hogy  $AR=7$ ,  $BP=5$  és  $CQ=6$ ?

**5. feladat**

Határozza meg azokat az egész számokból álló  $(x;y)$  számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$