**Bolyai János**

**Matematikai Társulat**

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2008/2009-es tanév
# 2. forduló
# haladók II. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Barbara ma ünnepelte születésnapját. Meglepve tapasztalta, hogy ha összeadja születési évének számjegyeit, akkor éppen azt kapja meg, hogy hány éves. Mikor született Barbara?

**Megoldás.** Ha $n$-nel jelöljük a születési évszámot, $S(n)$-nel pedig az $n$ szám jegyeinek összegét, akkor $n + S(n) = 2009$. 2 pont

Ha $n \leqq 2000$, akkor $S(n) \leqq 1 + 9 + 9 + 9 = 28$, így $n \geqq 1981$. 1 pont

Mivel 2009 9-cel osztva 2 maradékot ad, valamint $n$ és $S(n)$ 9-es maradéka ugyanaz, ezért $n$ és $S(n)$ maradéka is csak 1 lehet. 1 pont

Az $n$ szám lehetséges értékei közül így csak 1981, 1990 vagy 1999 jöhet számításba. A három érték közül csak $n = 1990$ a megfelelő, ami valóban megoldás is. 1 pont

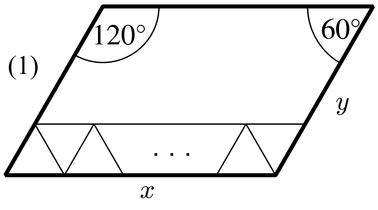
Ha pedig $2000 \leqq n \leqq 2008$, akkor például az $n + S(n) = 2009$ egyenlőség alapján $n$ és $S(n)$ azonos paritása miatt az összeg csak páros lehet, így nem érhet 2009-et, azaz ebben az esetben nincs megoldás. 2 pont

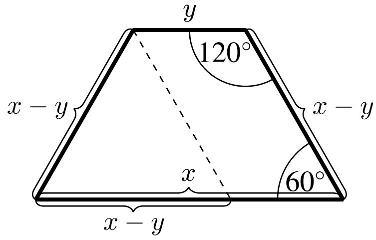
Összesen: 7 pont

**2.** 24 darab egységnyi oldalú szabályos háromszöglap maradéktalan felhasználásával hány darab egybevágóság erejéig különböző konvex négyszög rakható ki hézagmentesen és átfedés nélkül?

**Megoldás.** Bármely kirakható konvex négyszög szögei csak 60 vagy 120 fokosak lehetnek, mert a szabályos háromszög szögei 60 fokosak. Ezért kétfajta lényegesen különböző konvex négyszög állítható elő:

paralelogramma, illetve szimmetrikus trapéz.

(1) 


(2) 


1 pont

Az (1) ábra alapján a paralelogramma egy rétegében $2x$ számú kis háromszög van, ezért $y$ rétegben $2xy$ számú háromszög van. 1 pont

A (2) ábra szerint a trapézt alkotó háromszögek száma

$$(x-y)^2 + 2y(x-y) = x^2 - y^2. \quad \text{1 pont}$$

Az (1) esetben $2xy = 24$, azaz $xy = 12$, ahol a feltételeknek megfelelően feltehető, hogy $1 \leqq x \leqq y$. A megoldások száma így 3, hiszen $x = 1, 2, 3$ lehet csak. A megfelelő paralelogrammák az $1 \times 12$-es, $2 \times 6$-os, $3 \times 4$-es oldalúak. 2 pont

A (2) esetben a trapéz mérete $24 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, ahol $x - y < x + y$ és $x - y$, valamint $x + y$ is páros szám.

A megfelelő megoldások a $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$ felbontások alapján $x = 7$, $y = 5$, illetve $x = 5$, $y = 1$. Tehát kétféle trapéz rakható ki. 2 pont

Összesen így 5 darab megfelelő négyszög állítható elő.

---

Összesen: 7 pont

*Megjegyzés:* mind az öt megfelelő négyszög megadásáért legfeljebb 4 pont adható, ha a tanuló nem igazolja azt, hogy más eset nem lehetséges.

**3.** Legyen $n$ tetszőleges természetes szám. Lehet-e az

$$x = \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

szám egészrésze négyzetszám?

(Az $x$ szám egészrészét $[x]$ jelöli, ahol $[x]$ az $x$ számnál nem nagyobb legnagyobb egész szám.)

**Megoldás.** A nevezőt gyöktelenítve $x = 2n + 2 + 2\sqrt{n^2 + n}$. 1 pont

Így $[x] = 2n + 2 + \left[2\sqrt{n^2+n}\,\right]$.

Mivel $n^2 \leqq n(n+1) < (n + 0{,}5)^2$, ezért 2 pont

$$2n \leqq 2\sqrt{n^2+n} < 2\sqrt{(n+0{,}5)^2} = 2n + 1, \quad \text{így} \quad \left[2\sqrt{n^2+n}\,\right] = 2n. \quad \text{1 pont}$$

Tehát $[x] = 2n + 2 + 2n = 4n + 2$. 1 pont

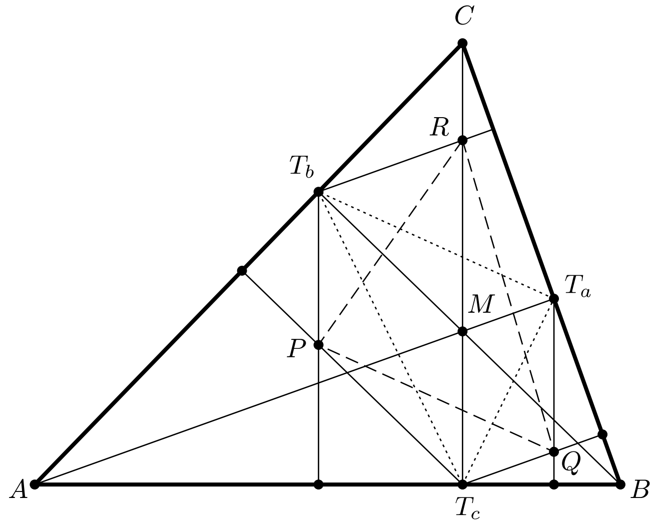
Viszont egy négyzetszám 4-es maradéka nem lehet 2, így $[x]$ értéke nem lehet négyzetszám. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

**4.** Legyenek az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságvonalai $AT_a$, $BT_b$, $CT_c$. Bizonyítsuk be, hogy az $AT_bT_c$, $BT_aT_c$ és $CT_bT_a$ háromszögek magasságpontjai által meghatározott háromszög egybevágó a $T_aT_bT_c$ háromszöggel!

**Megoldás.** Legyen az $ABC$ háromszög magasság pontja $M$ és $P$, $Q$, $R$ rendre az $AT_bT_c$, $BT_aT_c$ és $CT_bT_a$ háromszögek magasságpontjai. Belátjuk, hogy $PQ = T_bT_a$. A bizonyítás a másik két oldalra teljesen hasonlóan belátható.




$T_bMT_cP$ paralelogramma, mert $T_bM$ és $T_cP$ merőleges $AC$-re és $T_bP$ és $MT_c$ merőleges $AB$-re. Így $T_bP$ párhuzamos és egyenlő hosszú $MT_c$-vel. 1 pont

$T_aMT_cQ$ paralelogramma, mert $MT_c$ és $T_aQ$ merőleges $AB$-re és $T_cQ$ és $MT_a$ merőleges $CB$-re. Így $T_aQ$ párhuzamos és egyenlő hosszú $MT_c$-vel. 1 pont

Ezért $T_bP$ párhuzamos és egyenlő hosszú $T_aQ$-val. 1 pont

Azaz $T_aT_bPQ$ paralelogramma. 1pont

Ebből következik, hogy $PQ$ egyenlő hosszú $T_bT_a$-val. 1 pont

Hasonlóan belátható, hogy $PR = T_aT_c$ és $RQ = T_bT_c$. 1 pont

Így a $T_aT_bT_c$ háromszög egybevágó a $PQR$ háromszöggel, mivel három-három oldaluk rendre egyenlő. 1 pont

Összesen: 7 pont