Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely valós $(x;y)$ számpárokra teljesül mindkét alábbi egyenlőség?

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + xy &= 180 \\ y^2 + 2xy &= 40 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Szorozzuk meg az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel: $4x^2 + 2xy = 360$.

Összeadva a két egyenletet: $4x^2 + 4xy + y^2 = 400$, azaz $(2x+y)^2 = 400$.

Így $2x + y = 20$ vagy -20.

Kivonva egymásból a két egyenletet: $4x^2 - y^2 = 320$, azaz $(2x+y)(2x-y) = 320$.

1. eset: $2x + y = 20$, ekkor $2x - y = 16$, innen $x = 9$ és $y = 2$.

2. eset: $2x + y = -20$, ekkor $2x - y = -16$, innen $x = -9$ és $y = -2$.

Mindkét megoldás kielégíti mindkét egyenletet.

2. 60 darab egységkockából egy 3, 4, 5 élhosszúságú téglatestet építettünk. Az egységkockák csúcsai hány olyan téglatestet határoznak meg, amelynek oldallapjai párhuzamosak az eredeti téglatest oldallapjaival?

1. megoldás. Egy adott téglatestet egyértelműen meghatároz az a 3 párhuzamos síkpár, amely közrefogja. Az 5 hosszúságú élre merőlegesen 6 síkból választhatunk ki kettőt, a 4 hosszúságúra merőlegesen 5 közül, a 3 hosszúságúra merőlegesen pedig 4 közül. Ez alapján a téglatestek száma:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 10 \cdot 6 = 900.$$

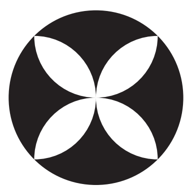
2. megoldás. (Inkább csak másik megfogalmazás.) Képzeljük el a téglatestet a koordinátarendszerben: egyik csúcsa az origó és az xy síkon fekszik! Így minden keresett téglatestet egyértelműen megadhatunk a testátlójának két végpontjával:
$A(a_1;a_2;a_3)$ és a szemközti csúcs $G(g_1;g_2;g_3)$, ahol $a_i < g_i$, minden $i = 1,2,3$-ra.

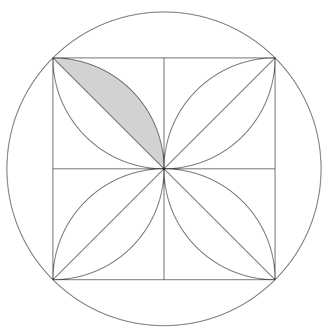
$0 \leqq a_1;\ g_1 \leqq 5$, azaz 6 számból kell két különbözőt kiválasztani úgy, hogy a sorrendjük nem számít.

Ezt $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen lehet megtenni. Hasonlóan adódik, hogy a csúcsok második koordinátája $\binom{5}{2} = 10$-féle, a harmadik $\binom{4}{2} = 6$-féle lehet.

A téglatestek száma $15 \cdot 10 \cdot 6 = 900$.

3. Az alábbi ábrát úgy kaptuk, hogy egy egységsugarú körbe négyzetet szerkesztettünk, majd a négyzet minden oldala, mint átmérő fölé a négyzet belseje felé néző félköröket rajzoltunk. Ezután az ábra bizonyos részeit fehérre, másokat feketére színeztük. Mekkora a feketére színezett rész területe?





Megoldás. Készítsük el az eredeti ábrát, és húzzuk be a négyzet átlóit, illetve középvonalait!

A nagy kör területe $T_{\text{kör}} = \bigcirc$.

Számítsuk ki a fehérre színezett rész területét!

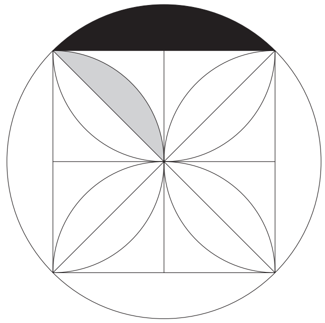
Ehhez elég megállapítanunk a szürkére színezett körszelet területét, mivel a fehér rész 8 ilyen körszeletből áll.

Annak a negyedkörnek a sugara, amely a körszelethez tartozik, a négyzet oldalának fele, azaz $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Így

$$T_{\text{szelet}} = T_{\text{cikk}} - T_{\text{háromszög}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \pi}{4} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\,.$$

Tehát a fehér rész területe: $T_{\text{fehér}} = 8 \cdot T_{\text{szelet}} = \bigcirc - 2$.

Így a fekete rész területe éppen $T_{\text{fekete}} = T_{\text{kör}} - T_{\text{fehér}} = \bigcirc - (\bigcirc - 2) = 2$ területegység.



Megjegyzés: A feladat hasonlósággal könnyebben megoldható: a szürke és a fekete körszelet hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya $1 : \sqrt{2}$, így területeik aránya $1 : 2$. A 8 „kis” szelet területének összege, így éppen a 4 „nagy” szelet területének összege, azaz körből elvéve a fehér rész területét éppen a négyzet területét kapjuk, ami $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.