Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Állítsuk elő tetszőleges n pozitív egész szám esetén a $36n^2+25+12n$ összeget minimális számú páratlan négyzetszám összegeként!

Megoldás. Ismert, hogy egy páratlan négyzetszám 8-as maradéka 1, hiszen, ha $x \in \mathbb{Z}$, akkor $(2x+1)^2 = 4x(x+1)+1$, ahol $x(x+1)$ páros szám, ezért $(2x+1)^2$ 8-as maradéka valóban 1. 1 pont

$36n^2+25+12n = (6n+1)^2+24$, ahol $(6n+1)^2$ 8-as maradéka 1, 24 pedig osztható 8-cal. Tehát $36n^2+25+12n$ 8-as maradéka 1. 1 pont

Ha tehát $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2 = 36n^2+25+12n$, akkor k értéke csak $8m+1$ alakú lehet, ahol $m \in \mathbb{N}$, hiszen az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ páratlan számok négyzetösszege 8-cal osztva 1 maradékot ad. 2 pont

Az $m=0$ esetben $x_1^2 = 36n^2+12n+25$, azaz $x_1 \in \mathbb{N}$ esetén $x_1^2 = (6n+1)^2+24$, így $x_1^2-(6n+1)^2 = 24$ adódik.

Az $(x_1-6n-1)(x_1+6n+1) = 24$ egyenlet tényezői csak párosak lehetnek, mert a különbség és az összeg azonos paritású.

Mivel $x_1-6n-1 < x_1+6n+1$, ezért $x_1-6n-1=2$ és $x_1+6n+1=12$, vagy $x_1-6n-1=4$ és $x_1+6n+1=6$ lehet csak.

Egyik esetben sem kapunk n-re megfelelő pozitív egész számot ($n=\dfrac{2}{3}$, illetve $n=0$). 2 pont

Az $m=1$ viszont minden esetben megfelelő előállításra vezet: $k=9$ esetén a

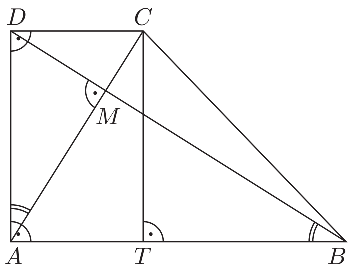
$$36n^2+25+12n = (6n+1)^2+3^2+3^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2$$

felbontás megfelel a feltételeknek. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ derékszögű trapéz alapjai $AB=a$, $CD=c$ hosszúak, a derékszögű szár $AD=d$, a másik szár $BC=b$ hosszú. A trapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c, d oldalakból – mint szakaszokból – kiválasztható három úgy, hogy a kiválasztott oldalakból szerkeszthető háromszögnek biztosan lesz $60°$-os szöge.

Megoldás.



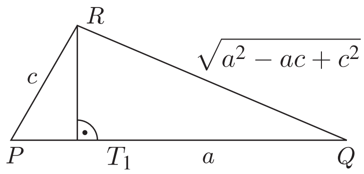
$$AB = a, \quad BC = b,$$
$$CD = c, \quad DA = d,$$
$$\text{ahol } a \geqq c.$$

Ábránk alapján az ACD és BDA háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük egyenlő.

A hasonlóság alapján $d : a = c : d$, azaz $d = \sqrt{ac}$. 1 pont

A CTB derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján $b^2 = \left(\sqrt{ac}\right)^2 + (a-c)^2$, ahonnan $b = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$. 1 pont

Az a, b, c, d oldalak közül az a, c, $b = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$ oldalakat kiválasztva a következő ábrának megfelelő háromszöget kapjuk:



Megmutatjuk, hogy a vázolt háromszög létezik, továbbá azt, hogy az $RPQ\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

A $c \leqq a$ feltételből közvetlenül adódik, hogy $c \leqq \sqrt{a^2 - ac + c^2} \leqq a$.

A háromszög létezéséhez elég tehát azt igazolni, hogy $\sqrt{a^2 - ac + c^2} > a - c$, ami négyzetre emeléssel nyilvánvaló. 1 pont

A $PT_1 = x$, $T_1R = m$ jelölésekkel az ábra derékszögű háromszögeire $m^2 + x^2 = c^2$, illetve $m^2 + (a-x)^2 = a^2 - ac + c^2$ teljesül. A két egyenlet megfelelő oldalainak különbsége:

$$a^2 - 2ax + x^2 - x^2 = a^2 - ac, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{c}{2}.$$ 1 pont

A PT_1R derékszögű háromszögben tehát a PT_1 befogó a PR átfogó fele, ami azt jelenti, hogy a háromszög egy szabályos háromszög egyik (szimmetrikus) fele. 1 pont

Így pedig az $RPQ\sphericalangle$ nagysága valóban 60°. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy például az $a = 4c$ adatválasztással csak az általunk megadott háromszög választása esetén lesz a háromszög egyik szögének értéke 60°.

3. Adottak az $\{1\}$, $\{1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;3;4\}$, $\ldots$, $\{1;2;3;\ldots;8\}$ halmazok. A halmazok mindegyikéből kiválasztunk egy-egy elemet. Egy k elemű halmazból egy elemet $\frac{1}{k}$ valószínűséggel választunk.

p_k-val jelöljük annak valószínűségét, hogy a kiválasztott 8 darab szám maximuma éppen k. Határozzuk meg a $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_8$ valószínűségek legnagyobb értékét!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy a 8 darab elem kiválasztása a halmazok sorrendjének megfelelően $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8$-féle módon történhet, azaz rendezett számnyolcasokat képzünk. 1 pont

Vizsgáljuk most meg az olyan kiválasztásokat, amelyekben k vagy k-nál kisebb a maximális elem $(k = 1, 2, 3, \ldots, 8)$!

Az ilyen esetek száma $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k) \cdot k^{8-k} = k! \cdot k^{8-k}$.

Most nézzük meg, hogy hány esetben lesz k-nál kisebb a maximum! A megfelelő esetek száma (az előző eset alapján)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot (k-1)^{9-k} = (k-1)! \cdot (k-1)^{9-k}.$$ 1 pont

Feladatunk szempontjából a kedvező esetek száma

$$k! \cdot k^{8-k} - (k-1)!(k-1)^{9-k} = (k-1)! \cdot \left(k^{9-k} - (k-1)^{9-k}\right),$$

ahol $k = 1, 2, 3, \ldots, 8$. 1 pont

A p_k valószínűség értéke így $\dfrac{(k-1)!\left(k^{9-k} - (k-1)^{9-k}\right)}{8!}$. 1 pont

Formulánk alapján

$$p_1 = \frac{1}{8!}, \qquad p_2 = \frac{2^7 - 1}{8!} = \frac{127}{8!}, \qquad p_3 = \frac{2 \cdot \left(3^6 - 2^6\right)}{8!} = \frac{1330}{8!},$$

$$p_4 = \frac{6 \cdot \left(4^5 - 3^5\right)}{8!} = \frac{4686}{8!}, \qquad p_5 = \frac{24 \cdot \left(5^4 - 4^4\right)}{8!} = \frac{8856}{8!},$$

$$p_6 = \frac{120 \cdot \left(6^3 - 5^3\right)}{8!} = \frac{10\,920}{8!}, \qquad p_7 = \frac{720 \cdot \left(7^2 - 6^2\right)}{8!} = \frac{9360}{8!},$$

$$p_8 = \frac{5040 \cdot (8-7)}{8!} = \frac{5040}{8!}.$$ 2 pont

A maximális valószínűség $p_6 = \dfrac{10\,920}{8!} = \dfrac{13}{48}$. 1 pont

Összesen: 7 pont