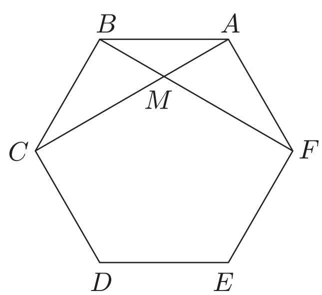
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást? (6 pont)

Megoldás.



Jelölje a két átló metszéspontját M! A hatszög szimmetriája miatt $AM = BM$, illetve $CM = FM$. 1 pont

Az ABF háromszög egyenlőszárú és szárszöge 120°, így $ABF\sphericalangle = AFB\sphericalangle = 30^\circ$, és a hatszög szimmetriája miatt a $BCA\sphericalangle$ szintén 30°-os. Ezért

$$MBC\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABF\sphericalangle = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ. \qquad 2 \text{ pont}$$

Tehát a CBM háromszög „fél” szabályos háromszög, így $CM = 2 \cdot BM$. 2 pont

Azaz $FM = 2 \cdot BM$, tehát az átlók $2 : 1$ arányban osztják egymást. 1 pont

Megjegyzés: Ha az FA és CB oldalegyenesek metszéspontja G, akkor AGB szabályos háromszög (a szabályos hatszög külső szögei 60°-osak). Így AC és BF a CFG háromszög súlyvonalai, amelyek $2 : 1$ arányban osztják egymást.

2. Az N pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata 3^{595}. Határozzuk meg az N szám utolsó számjegyét! (6 pont)

Megoldás. Mivel az osztók szorzatában csak a 3-as prímtényező szerepel, ezért az N szám háromhatvány, így minden osztója háromhatvány. Tehát pozitív osztói a következők: 1, 3, 3^2, 3^3, …, 3^n. Ezek szorzata

$$1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{1+2+3+\ldots+n} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}. \qquad 2 \text{ pont}$$

Így $\dfrac{n(n+1)}{2} = 595$, azaz $n(n+1) = 1190$. Az 1190 osztópárjait felírva kapjuk, hogy $n = 34$. Tehát $N = 3^{34}$. 2 pont

A végződés megállapításához tekintsük az alábbi táblázatot!

hatvány	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
végződés	1	3	9	7	1	3

A végződés periodikusan ismétlődik, a periódushossz 4, így az N szám 9-re végződik, mert $34 = 8 \cdot 4 + 2$. 2 pont

3. Mely x és y pozitív egész számokra igaz az alábbi egyenlőség?

$$x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$$ (6 pont)

Megoldás. Alakítsuk át a kifejezést: $(x+1)^2 - (y+3)^2 = 17$. 2 pont

Innen alkalmazva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot: $(x+y+4)(x-y-2) = 17$. 1 pont

Mivel mindkét tényező egész szám, $(x+y+4)$ biztosan pozitív és nagyobb, mint $(x-y-2)$, így a 17-nek csak egyetlen szorzattá bontása jön szóba: $x+y+4 = 17$ és $x-y-2 = 1$. 2 pont

Innen a szokásos módon megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $x = 8$ és $y = 5$, amelyek valóban megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

4. Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a három különböző gombot egy meghatározott sorrendben közvetlenül egymás után nyomjuk meg. Legkevesebb hány gombnyomásra van szükség ahhoz, hogy biztosan kinyíljon a zár? (A megfelelő három gombnyomást esetlegesen megelőző gombnyomások sorozatának nincs hatása a zár szerkezetére.) (6 pont)

Megoldás. A három gombot $3! = 6$ különböző sorrendben nyomhatjuk meg. Így a gombnyomások olyan sorozatára van szükség, amely mind a 6 lehetséges sorrendet tartalmazza.

Számozzuk meg a gombokat az 1, 2, 3 számokkal. Megmutatjuk, hogy 9 gombnyomás elegendő, de ennél kevesebb nem. 1 pont

Egy megfelelő gombnyomás sorozat: 1, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1. 1 pont

Tegyük fel, hogy van olyan 1, 2, 3 számokból készített nyolcelemű sorozat, amely alkalmas a zár kinyitására. Egy ilyen 6 próbálkozást tesz lehetővé, így ennél rövidebb sorozat nem jöhet szóba. 1 pont

A fellépő háromtagú részsorozatoknak így páronként különbözőnek kell lennie. Ebből következően szomszédos és a másodszomszédos elemek nem lehetnek egyenlők. 1 pont

Tekintsük a 3. helyen álló h elemet. Mivel h-val kezdődő permutáció 2 van, ezért a h még egyszer előfordul a sorozatban. Ez a 2. előfordulás nem lehet az 1., 2., 4., 5. és a két utolsó pozíción sem, hiszen ellenkező esetben lennének túl közeli h elemek, vagy pedig nem férne el a nyolctagú sorozatban a másik h-val kezdődő permutáció. Így h másodszor a 6. pozíciót foglalja el, ezért a vele kezdődő második permutáció a 8-as sorszámú elemmel végződik, az alábbiak szerint: _, _, h, x, y, h, y, x.

Ekkor viszont az 5. elemmel kezdődő hármasban az y elem megismétlődik.

Így beláttuk, hogy 9 gombnyomás feltétlenül szükséges a zár biztos kinyitásához. 2 pont