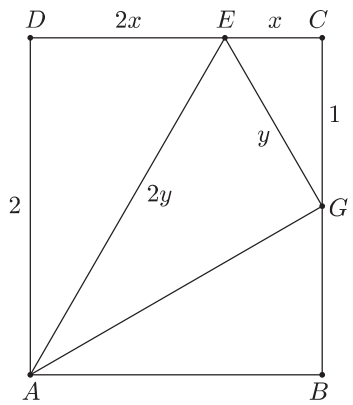
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ téglalap BC oldala 2 egység hosszúságú. Jelölje a BC oldal felezőpontját G, a CD oldal C csúcshoz közelebbi harmadoló pontját E. Mekkora az AB oldal, ha az EAG szög 30°?



Megoldás. Ha $EC = x$ és $EG = y$, akkor az AED és GCE derékszögű háromszögekből a Pitagorász-tétel alapján:

$$AE^2 = (2x)^2 + 2^2 = 4(x^2 + 1^2) = (2y)^2,$$

tehát $AE = 2y$. Mivel az EAG szög 30°, ebből az következik, hogy ha az E-nek az AG egyenesre vonatkozó tükörképe E_1, akkor az AE_1E háromszög szabályos és $y = EG = GE_1$. Így $EE_1 = 2y = EG + GE_1$, tehát G az EE_1 felezőpontja, hiszen a háromszög egyenlőtlenség miatt G-nek az EE_1-re kell illeszkednie. Ezért $AG = \sqrt{3}y$.

Tehát az ABG derékszögű háromszögből a Pitagorász-tétel alapján: $\left(\sqrt{3}y\right)^2 = (3x)^2 + 1^2$, de láttuk, hogy $y^2 = x^2 + 1$. Ezekből már egyszerűen megkapjuk, hogy $AB = 3x = \sqrt{3}$.

2. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ összefüggés?

Megoldás. Redukáljunk nullára és szorozzuk végig az egyenlőséget abc-vel! Ekkor a

$$c^2b - b^2c + a^2c - ac^2 + b^2a - a^2b = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Alakítsuk szorzattá a baloldali kifejezést!

$$c^2b - b^2c + a^2c - ac^2 + b^2a - a^2b = c\big(bc - b^2 + a^2 - ac\big) - ab(a-b) =$$

$$= c\big[(a-b)(a+b) - c(a-b)\big] - ab(a-b) = (a-b)\big(ca + cb - c^2 - ab\big) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = 0.$$

Ez az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$ vagy $b = c$ vagy $c = a$. Mivel $\beta = 2\alpha$, így $a \neq b$, tehát vagy $b = c$, vagy $c = a$.

Ha $b = c$, akkor $\gamma = \beta = 2\alpha$, így $\alpha + \beta + \gamma = 5\alpha = 180°$, amiből $\alpha = 36°$. Tehát $\gamma = \beta = 72°$.

Ha $c = a$, akkor $\gamma = \alpha$, így $\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha = 180°$, amiből $\gamma = \alpha = 45°$ és $\beta = 90°$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a háromszög oldalaira előírt feltétel mindkét esetben teljesül, tehát valóban megoldásokat kaptunk.

3. Pisti a következő játékot játssza. Először felír a táblára egy pozitív egész számot. Ezután minden lépésben letörli a táblán levő számot, s helyette, ha páros volt, akkor a szám felét, ha páratlan volt, akkor a nála 7-tel nagyobb számot írja fel. Jelöljük A-val, B-vel, illetve C-vel azon pozitív egész számok halmazát, melyekből kiindulva Pisti megkaphatja az 1, 3, illetve 7 számokat (a játékot utána is folytatja, miután ezek valamelyikét megkapta).

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám az A, B, C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

$b)$ Hány 1 000 000-nál kisebb eleme van A-nak, B-nek, illetve C-nek?

Megoldás. Definiáljuk az alábbi halmazokat:

$$A' := \{\text{7-tel osztva 1 vagy 2 vagy 4 maradékot adó pozitív egész számok}\},$$

$$B' := \{\text{7-tel osztva 3 vagy 5 vagy 6 maradékot adó pozitív egész számok}\},$$

$$C' := \{\text{7-tel osztva 0 maradékot adó pozitív egész számok}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden pozitív egész szám e három halmaz közül pontosan az egyiknek eleme. Mind a három halmaz zárt a feladatban szereplő két műveletre, hiszen egy szám és a nála 7-tel nagyobb szám 7-tel osztva ugyanazt adja maradékul, másrészt egy A'-beli páros szám 14-es maradéka 2 vagy 4 vagy 8, ilyennek a fele is A'-beli, egy B'-beli páros szám 14-es maradéka 6 vagy 10 vagy 12, ilyennek a fele is B'-beli és végül egy C'-beli páros szám 14-es maradéka 0, ilyennek a fele is C'-beli. Ebből látjuk, hogy $A = A$', $B = B$', $C = C$'.

Tehát minden pozitív egész szám az A, B, C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

Az 1 000 000-nál kisebb számok közül 428 571 van A-ban, ugyanennyi B-ben és 142 857 C-ben.