

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Egy kör kerületére felírjuk 1-től 13-ig az egészeket valamilyen sorrendben. Három (a kör mentén) szomszédos számot *trió*nak nevezünk. (13 ilyen csoport van.) A trióban lévő három szám összegét: a *trió összegének* hívjuk. Egy *trió maximális*, ha a trió összege nagyobb, vagy egyenlő, mint az adott sorrendnél fellépő másik 12 trió bármelyikének az összege.

Mennyi a maximális trió összegének minimuma (az összes lehetséges sorrend esetén)?

2. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

3. Van 15 darab különböző 2 és 2013 közé eső pozitív egészünk úgy, hogy bármely kettő (különböző) közülük relatív prím egymáshoz.

Igazoljuk, hogy a számok között van prím!

4. Az $ABCD$ négyzet BD átlóján úgy vettük fel az M és N pontokat, hogy

$$BM^2 + ND^2 = MN^2.$$

Mekkora az MAN szög?

5. Melyek azok az x valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$[x] + [2x] + [3x] + \dots + [2012x] = 2013?$$

($[y]$ értéke az a legnagyobb egész szám, amely y -nál nem nagyobb.)