Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 60 lapból álló kézirat oldalait rendre megszámozták az 1, 2, ..., 120 oldalszámokkal. A kézirat néhány lapja azonban elveszett. A megmaradt lapok oldalaira írt számok összege 7159. Hány lap veszett el?

Megoldás. Eredetileg a könyv oldalszámainak összege: $1+2+3+\ldots+120=121\cdot 60=$ $=7260$. Így az elveszett lapokra írt oldalszámok összege $7260-7159=101$. Egy lapon két oldalszám található, egy páratlan $(2k-1)$, és egy páros $(2k)$. Ezek összege $4k-1$ $(k \geqq 1)$. Ha s db lap veszett el, akkor a teljes összeg

$$4k_1-1+4k_2-1+\ldots+4k_s-1=4(k_1+k_2+\ldots+k_s)-s$$

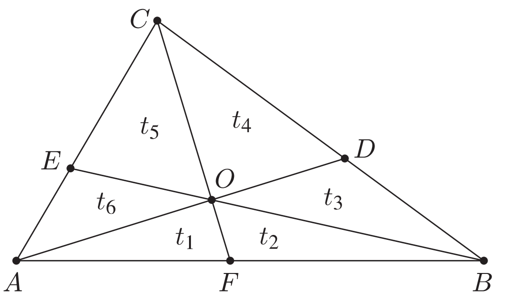
értékkel csökken. Tehát $4(k_1+k_2+\ldots+k_s)-s=101$, amiből következik, hogy s négyes maradéka 3. Ebből

$$101=4(k_1+k_2+\ldots+k_s)-s \geqq 4(1+2+\ldots+s)-s=4\frac{s(s+1)}{2}-s=$$

$$=2s^2+s=s(2s+1).$$

Mivel $s=7$ esetén az $s(2s+1)=105$, ezért $s<7$. Így $s=3$ lehet csak, mert a négyes maradéka 3. Ekkor $k_1+k_2+k_3=26$, amelynek nyilván van páronként különböző pozitív egészekből álló megoldása (pl. 1, 2, 23), tehát három lap veszett el.

2. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain adottak a D, E, F pontok úgy, hogy az AD, BE, CF szakaszok egy közös O pontban metszik egymást. Határozzuk meg az OF szakasz hosszát, ha $AO=23$, $BO=24$, $CO=29$, $OD=7$ és $OE=8$ egység hosszúságú!



Megoldás. Vezessük be az ABC háromszög részeinek területére az ábrán látható jelöléseket. Az ABO és ABC háromszögek alapja közös, magasságaik aránya pedig $OF:CF$. Területeik aránya így

$$\frac{OF}{CF}=\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6}.$$

Hasonlóan kapjuk a következő arányokat:

$$\frac{OD}{AD} = \frac{t_3 + t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6},$$
$$\frac{OE}{BE} = \frac{t_5 + t_6}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}.$$

Az előbbi egyenletek összeadásával az

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

összefüggés adódik.

A megadott hosszúságok behelyettesítésével:

$$\frac{OF}{CF} = 1 - \frac{OD}{AD} - \frac{OE}{BE} = 1 - \frac{7}{30} - \frac{8}{32} = \frac{31}{60},$$
$$\frac{OF}{29 + OF} = \frac{31}{60}.$$

Innen pedig átrendezéssel adódik, hogy:

$$OF = 31.$$

A keresett szakasz tehát 31 egység hosszúságú.

3. Legyen x, y, z három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az xyz szorzat értékét, ha tudjuk, hogy

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}!$$

Megoldás. Tekintsük az egyenlőségeket külön-külön! Rendezzük át az $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$ egyenlőséget az alábbi módon:

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y},$$

$$x - y = \frac{y - z}{yz},$$

$$yz = \frac{y - z}{x - y}.$$

(Az utolsó átalakítás korrekt, hiszen x, y és z páronként különbözőek.)

Ehhez hasonlóan kapjuk a $z+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{z}$ egyenlőségből, hogy $zx=\frac{z-x}{y-z}$, illetve a $z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}$ egyenlőségből, hogy $yx=\frac{y-x}{x-z}$. Így

$$xy\cdot yz\cdot zx=\frac{y-x}{x-z}\cdot\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{z-x}{y-z}=1.$$

Tehát az xyz szorzat értéke 1 vagy -1. Mindkét eset elő is fordulhat: $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=-2$ esetén $xyz=1$, ellentett számok esetében pedig a szorzat értéke -1.