Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $ab = 1$ és $ac + bd = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $cd \leqq 1$.

I. megoldás. $b = \dfrac{1}{a}$–t helyettesítve, $(a \neq 0)$ $c \cdot a^2 + d = 2a$ adódik, 2 pont

tehát a $c \cdot x^2 - 2x + d = 0$ egyenletnek „a” megoldása, 2 pont

azaz $D = 4 - 4cd \geqq 0$, 2 pont

amiből következik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

II. megoldás. Mivel $ab = 1$, a és b előjele megegyezik.

Ha c és d előjele különbözik, vagy valamelyik 0, akkor $cd \leqq 0 < 1$, tehát c és d előjele is megegyezik.

Ha a 4 szám előjele nem egyezne meg, akkor az előbbiek alapján ac és bd is negatív, tehát nem lehetne összegük 2. 2 pont

Tehát a, b, c, d előjele megegyezik, így az ac, bd, cd szorzatok pozitívak. 1 pont

Ekkor ac és bd számtani és mértani közepe:

$$\sqrt{abcd} \leqq \frac{ac + bd}{2} = 1,$$ 3 pont

amiből következik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

III. megoldás. A feltétel szerint: $ac - ab = ab - bd$, szorzattá alakítva:

$$a(c - b) = b(a - d).$$ 2 pont

Két egyenlő szám szorzata nemnegatív:

$$0 \leqq ab(c-b)(a-d) = ac + bd - ab - cd = 1 - cd,$$ 4 pont

amit átrendezve adódik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármelyik 2 tagja legfeljebb egy ülésen volt együtt. Bizonyítsuk be, hogy a bizottság legalább 64 tagból áll!

Megoldás. Ha található olyan tag, aki legalább 7 ülésen jelen volt, akkor az ezeken résztvevő többi 9 ember a feladat feltétele szerint minden ülésen különböző, azaz legalább $7 \cdot 9 = 63 + 1$ tag van. 3 pont

Ha pedig mindenki legfeljebb 6 ülésen vett részt, akkor az ülések összlétszáma csak úgy lehetett 400, ha legalább $400/6$, azaz 66-nál is több tagja van a bizottságnak. 4 pont

Összesen: 7 pont

3. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

(1) $$p + 1 = 2x^2,$$

(2) $$p^2 + 1 = 2y^2.$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

Megoldás. (Ha $(x;y)$ egész megoldása az egyenletrendszernek, a megfelelő ellentettek is azok, így p megtalálásához feltehetjük, hogy $x > 0$ és $y > 0$.)

A két egyenletet kivonva egymásból és szorzattá alakítva:

$$p \cdot \frac{p-1}{2} = (y+x)(y-x).$$ 1 pont

Mivel $p = 2$-re nincs egész megoldása az egyenletrendszernek, ezért $\frac{p-1}{2}$ egész és p osztója a jobb oldali szorzat egyik tényezőjének. 1 pont

A (2) egyenlet alapján $p > y$, így p $y - x$-nek nem, csak $y + x$-nek lehet osztója. 1 pont

Viszont mivel az egyenletek alapján $y > x$, így $2p > y + x$, csak $x + y = p$ és $y - x = \frac{p-1}{2}$ teljesülhet. 2 pont

A két egyenletet összeadva $y = \frac{3p-1}{4}$, ezt az eredeti egyenletrendszer (2) egyenletébe helyettesítve a

$$p^2 + 1 = 2\frac{(3p-1)^2}{16}$$

egyenlethez jutunk, amelynek a feltételeknek megfelelő megoldása csak a $p = 7$. 1 pont

A feladat feltételeinek ellenőrzése: 1 pont

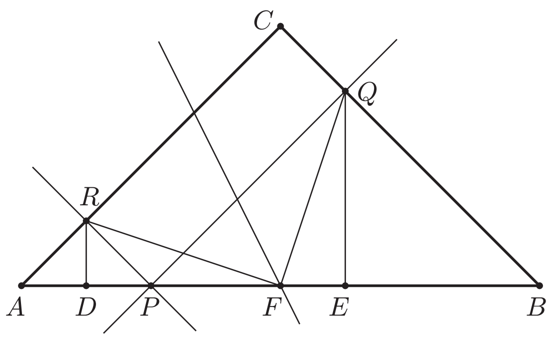
Összesen: 7 pont

4. Legyen a P pont az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete AC-n az R, BC-n a Q pont. Bizonyítsuk be, hogy

$a)$ Az RQ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át;

$b)$ P-ből az RQ szakaszra bocsátott merőlegesek is egy ponton mennek át!

Megoldás. $a)$ Jelöljük az AP távolságot x-szel, az AB távolságot c-vel, Legyen F az AB átfogó felezőpontja, D és E pedig R és Q pontok merőleges vetületei AB-n.



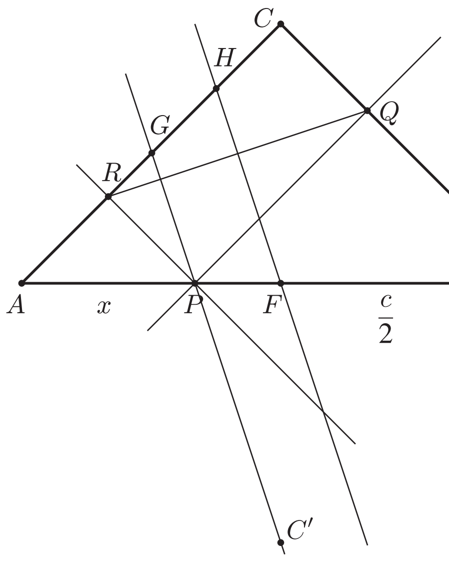
D és E APR és PBQ egyenlő szárú derékszögű háromszögek oldalfelező pontjai, tehát:

$$FE = \frac{c}{2} - \frac{c-x}{2} = \frac{x}{2} = RD,$$ 1 pont

$$EQ = \frac{c-x}{2} = \frac{c}{2} - \frac{x}{2} = DF.$$ 1 pont

DFR és EQF háromszögek egybevágók, mivel két oldal és a közbezárt szög megegyezik, tehát $FQ = FR$, vagyis az F pont P pont bármely helyzetében rajta van RQ szakasz felezőmerőlegesén. 1 pont

$b)$ Használjuk az ábra jelöléseit!



PG egyenes párhuzamos az előbbi FH egyenessel, így $GPR\sphericalangle = RQP\sphericalangle$ (merőleges szárú szögek), és $PRG\sphericalangle = QPR\sphericalangle$ (derékszögek), tehát PRG és QPR háromszögek hasonlóak.

$$\frac{RG}{RP} = \frac{RP}{PQ}, \quad \text{ebből} \quad RG = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x^2}{(c-x)}.$$ 1 pont

Ekkor:

$$AG = AR + RG = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x^2}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)},$$

$$CG = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c^2 - 2cx}{(c-x)}.$$ 1 pont

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{GH}{AG} = \frac{\frac{c}{2} - x}{x}, \quad \text{így} \quad GH = \frac{c-2x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{c^2 - 2cx}{(c-x)} = \frac{CG}{2}.$$ 1 pont

Az előbbiek alapján GP egyenest a HP egyenesből egy C középpontú, 2 arányú centrális hasonlósággal kapjuk, tehát az $a)$ állítást felhasználva ezek az egyenesek átmennek a C pont F pontra vonatkozó C' tükörképén. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

5. Egy $n \times n$-es tábla egyik mezőjén áll egy bábu. Egy lépésben mozoghatunk egyet fel, vagy egyet jobbra, vagy átlósan balra lefele egyet. Lehetséges-e, hogy a táblát úgy járjuk be, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és végül a kiindulási mezőtől eggyel jobbra érkezünk meg?

Megoldás. Számozzuk meg a tábla mezőit „szokásos” módon úgy, mint egy síkbeli koordináta-rendszer rácspontjait. Ekkor az $(a; b)$ koordinátájú mező feletti az $(a; b+1)$, a tőle jobbra lévő az $(a+1; b)$ és az átlósan balra lefelé lévő az $(a-1; b-1)$. 1 pont

Azt fogjuk vizsgálni, hogyan változik az $a+b$ összeg a tábla bejárása során. 1 pont

Két esetben 1-gyel nő az összeg, a harmadik típusú lépésnél pedig 2-vel csökken. Ez azt jelenti, hogy ha az $(a; b)$ mezőről az $(a'; b')$ mezőre léptünk, akkor

$$(a' + b') - (a + b) \equiv 1 \pmod{3}.$$ 2 pont

Mivel a táblának n^2 mezője van, ezért összesen $n^2 - 1$ lépés után kell megérkeznünk az $(a+1; b)$ mezőre. Mivel minden lépésben „eggyel nő” a koordináták összegének hármas maradéka, azt kaptuk, hogy szükségszerűen $n^2 - 1$ hárommal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Ez viszont lehetetlen, mert ebből az következne, hogy $n^2 = 3k + 2$, valamilyen k egészre, de egy négyzetszám nem adhat 2 maradékot 3-mal osztva. A tábla nem járható be a megadott feltételek szerint. 2 pont

---

Összesen: 7 pont