Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek!

$$\left.\begin{aligned} x+[y]+\{z\}&=3{,}4\\ [x]+\{y\}+z&=4{,}5\\ \{x\}+y+[z]&=5{,}3 \end{aligned}\right\}$$

($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a. $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli, azaz az a számnak és a egészrészének a különbségét: $\{a\}=a-[a]$.)

Megoldás. Összeadva a 3 egyenletet: $2x+2y+2z=13{,}2$. 2 pont

Amiből: $x+y+z=6{,}6$. 1 pont

A kapott egyenletből rendre kivonva az eredeti egyenleteket:

$$\{y\}+[z]=3{,}2;$$
$$\{x\}+[y]=2{,}1 \text{ és}$$
$$[x]+\{z\}=1{,}3.$$
2 pont

Figyelembe véve, hogy egy szám egészrésze egész szám, törtrésze pedig a $[0;1[$ intervallumba eső érték, 1 pont
a kapott egyenletekből rendre

$$[z]=3 \text{ és } \{y\}=0{,}2;$$
$$[y]=2 \text{ és } \{x\}=0{,}1 \text{ és}$$
$$[x]=1 \text{ és } \{z\}=0{,}3.$$
2 pont

Vagyis $x=1{,}1$, $y=2{,}2$ és $z=3{,}3$ adódik. 1 pont

A kapott értékeket ellenőrizve azok megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

2. a) Adjon meg egy olyan különböző pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

b) Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan különböző pozitív egész számokból álló 11 elemű halmaz, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

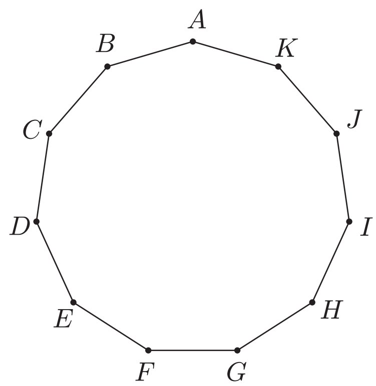
Megoldás. a) Legyen a halmaz elemeinek 6-tal való osztási maradéka rendre 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1! Ekkor, ha a kiválasztott 6 szám közé k db ($k = 1, 2, \ldots, 5$) 6-tal osztva 1 maradékot adó szám kerül, akkor az összeg is 6-tal osztva k maradékot fog adni. 2 pont

Például a $H = \{6; 12; 18; 24; 30; 1; 7; 13; 19; 25\}$ halmaz megfelelő. 1 pont

b) A skatulyaelv értelmében három különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható kettő, amelynek paritása megegyezik, így összegük páros. Ezért 11 különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 5 számpár, amelyek tagjainak összege páros. 3 pont

Az így kapott 5 (kételemű) összeg között vagy van három, amelyek 3-mal osztva különböző maradékot adnak, vagy van három, amelyek 3-mal osztva azonos maradékot adnak (skatulyaelv). Ennek a három összegnek az összege osztható 3-mal. 3 pont

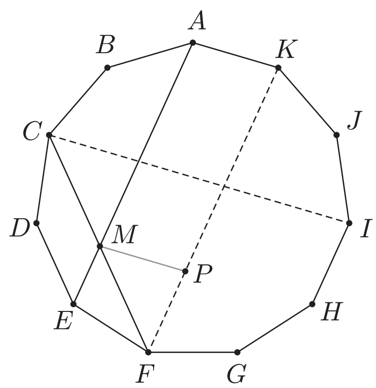
Mivel mindhárom összeg páros, így az összegük osztható 2-vel is, így $2 \cdot 3 = 6$-tal is. Ezzel a módszerrel találtunk 6 számot, amelyek összege osztható 6-tal. 1 pont



3. Adott az a oldalhosszúságú $ABCDEFGHIJK$ szabályos 11-szög. Legyen az AE átlónak és a CF átlónak a metszéspontja M!

Bizonyítsa be, hogy fennáll az $AF = AM + a$ összefüggés!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Be fogjuk bizonyítani, hogy $KF = AM + a$. Mivel $KF = AF$ (hiszen az F-en áthaladó szimmetriatengelyre tükrözve AF-et KF-et kapjuk), ezzel igazoltuk a feladatban szereplő állítást. 1 pont

$KF \parallel AE$, hiszen mindkét átló merőleges a C-n áthaladó szimmetriatengelyre. 1 pont

Vegyük fel az MP szakaszt úgy, hogy párhuzamos legyen az AK oldallal és P a KF átlóra illeszkedjen. 1 pont

Az így kapott $MPKA$ négyszög paralelogramma, mivel szemközti oldalai párhuzamosak. Innen $KP = AM$ és $MP = AK = a$. 2 pont

Így ahhoz, hogy igazoljuk, hogy $KF = KP + PF = AM + a$, elég megmutatnunk, hogy $PF = a$, azaz az MPF háromszög egyenlőszárú ($MP = PF = a$).

Ehhez rajzoljuk be a CI átlót. Az $ICF\sphericalangle = KFC\sphericalangle$, mivel a J-n áthaladó szimmetriatengelyre tükrözve az ICF szöget, a KFC szöget kapjuk. 2 pont

$CI \parallel AK \parallel MP$, mivel mindegyik merőleges az F-en áthaladó szimmetriatengelyre. $PMF\sphericalangle = ICF\sphericalangle$, mivel egyállású szögek. 2 pont

Mindezek alapján $PMF\sphericalangle = KFC\sphericalangle = PFM\sphericalangle$, azaz az MPF háromszög egyenlőszárú, így $MP = PF = a$. Ezzel állításunkat igazoltuk. 1 pont

Részpontok:

1 pont, ha bármilyen formában jelzi, hogy a szabályos 11-szögnek szimmetriatengelyei az egyik csúcson és a szemközti oldal felezőpontján áthaladó egyenesek.

1 pont, ha észreveszi, hogy bizonyos átlók hosszúsága megegyezik.

1 pont, ha észreveszi, hogy bizonyos átlók párhuzamosak.