Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – II. kategória

Feladatok

1. Adott az alábbi két egyenletrendszer:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{I.} \quad a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} \quad b(x-1)+cy=3; \end{cases} \qquad\qquad (2)\quad \begin{cases} \text{I.} \quad a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} \quad b|x-1|+cy=3. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy az első egyenletrendszernek nincs megoldása, a második egyenletrendszert viszont kielégíti a $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$ számpár. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékét!

2. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at lépünk? (Más esetnek tekintjük azt, ha az alján lépünk 3-at, utána mindig 2-t, vagy az elejétől kettesével lépünk és a végén 3-at.)

3. Jelöljön x, y, z olyan pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $2xy^2 = 3z^3$. Mennyi az xyz szorzat minimuma?

4. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, BC oldalának felezőpontja F, és DA oldalának A-hoz legközelebb levő negyedelő pontja G. Bizonyítandó, hogy FG, CH és DB egy ponton mennek át!

5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a+b=1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+a^4+b^4+\ldots+a^8+b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!