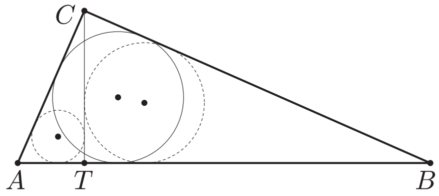
Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $a+b+c=1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq 1.$$

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A-nál és B-nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a, a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Bizonyítsuk be, hogy ha $r+r_a+r_b=CT$, akkor a háromszögnek C-nél derékszöge van!



3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

– kétharmada félszemű;
– háromnegyede falábú;
– négyötöde kampókezű, és
– öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldások és javítási útmutató

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $a+b+c=1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq 1.$$

1. megoldás. Kiindulva abból, hogy

$$\left(a-\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2 \geqq 0, \qquad \text{2 pont}$$

vagyis:

$$a^2-\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{16a} \geqq 0.$$

Mindkét oldalt $\sqrt{a}$-val növelve, kapjuk:

$$a^2+\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{16a} \geqq \sqrt{a}, \qquad \text{1 pont}$$

innen:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2 \geqq \sqrt{a}. \qquad \text{1 pont}$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 \geqq a. \qquad \text{1 pont}$$

Analóg a többi zárójel:

$$\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4 \geqq b \qquad \text{és} \qquad \left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq c. \qquad 1 \text{ pont}$$

Összeadva a megfelelő oldalakat és felhasználva az $a+b+c=1$ feltételt, igazoltuk, hogy:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq a+b+c=1. \qquad 1 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Tekintve, hogy a, b, c pozitív számok, felírjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az a, illetve az $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ kifejezésekre:

$$\frac{a+\frac{1}{4\sqrt{a}}}{2} \geqq \sqrt{a\cdot\frac{1}{4\sqrt{a}}}, \qquad 2 \text{ pont}$$

Rendezzük, így kapjuk:

$$\frac{a+\frac{1}{4\sqrt{a}}}{2} \geqq \frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{2}, \quad \text{azaz:} \quad a+\frac{1}{4\sqrt{a}} \geqq \sqrt[4]{a}. \qquad 2 \text{ pont}$$

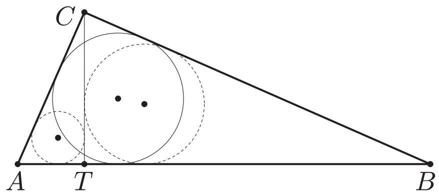
Mindkét oldalt negyedik hatványra emelve:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 \geqq a. \qquad 1 \text{ pont}$$

(Tovább az első megoldás szerint.)

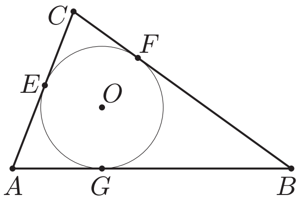
Összesen: 7 pont

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A-nál és B-nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a, a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Bizonyítsuk be, hogy ha $r+r_a+r_b=CT$, akkor a háromszögnek C-nél derékszöge van!



Megoldás. Vegyünk egy tetszőleges háromszöget, és a beírható körét. A csúcsból a körhöz húzott érintő szakaszok azonos hosszúságúak. Így az ábra jelöléseit használva

$$AE = AF = x.$$



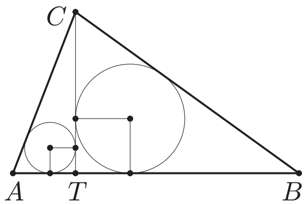
Ha $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$, akkor

$$BE = BG = c - x,$$
$$GC = CF = b - x,$$
$$BG + GC = BC = a,$$
$$c - x + b - x = a.$$

Ezt x-re rendezve kapjuk, hogy $x = \dfrac{b+c-a}{2}$. 2 pont

(Ha levezetés nélkül használja ezt az összefüggést, akkor is jár a 2 pont.)

Mivel CT merőleges AB-re, ezért a T-ből húzott érintőszakaszok derékszöget zárnak be egymással. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért a körök középpontjai, az érintési pontok és a T pont egy négyzetet határoznak meg. Így az érintő szakaszok hossza a kis kör sugarával egyezik meg. 1 pont



Az előzőeket felhasználva T-ből húzott érintőszakaszok hossza:

$$r_a = \frac{CT + AT - b}{2}, \quad \text{illetve} \quad t_b = \frac{CT + TB - a}{2}.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy $r = CT - r_a - r_b$ és $AT + TB = c$.

Behelyettesítve és rendezve kapjuk, hogy

$$r = CT - r_a - r_b = CT - \frac{CT + AT - b}{2} - \frac{CT + TB - a}{2} = \frac{a + b - c}{2}.$$ 1 pont

Tehát a sugár megegyezik a C pontból húzott érintőszakasz hosszával. 1 pont

Mivel így a C-ből induló érintőszakaszok, és az érintési pontba húzható sugarak egy rombuszt alkotnak, amelynek két szemben lévő szöge derékszög (mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre) ezért ez az alakzat egy négyzet. Azaz az ABC háromszögnek a C csúcsánál derékszög van. Ezt kellett bizonyítanunk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

– kétharmada félszemű;
– háromnegyede falábú;
– négyötöde kampókezű, és
– öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás. Először belátjuk, hogy a hajón $S = 60m$ (60-nal osztható számú) matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel, és 6-tal is osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is, azaz 60-nal. 2 pont

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy (kék) sapkát. Kiosztottunk $20m$ sapkát.

Minden matróznak, aki nem falábú, húzzunk a fejére egy (piros) sapkát. Kiosztottunk $15m$ sapkát.

Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy (zöld) sapkát. Kiosztottunk $12m$ sapkát.

Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy (fehér) sapkát. Kiosztottunk $10m$ sapkát.

Így összesen $57m$ darab sapkát osztottunk ki.

Mivel a matrózok száma $60m$, legalább $3m$ olyan matróz van, akinek a fején nincsen egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. 2 pont

Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért a lehetséges matrózszám $S = 60, 120, 180, \ldots$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$ esetek).

Ha $m \geqq 2$, akkor a fentiek szerint legalább $3m \geqq 6$ matróz lenne olyan, hogy mind a négy tulajdonsággal rendelkezik.

Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért csak $m = 1$ lehet, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. 1 pont

Hátra van még annak a megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

	Hány fő?	Félszem	Faláb	Kampókéz	Kopasz
	10	×	×	×	
	12	×	×		×
	13	×		×	×
	2			×	×
	18		×	×	×
	5	×	×	×	×
Ellenőrzés	60	40	45	48	50

2 pont

Összesen: 7 pont