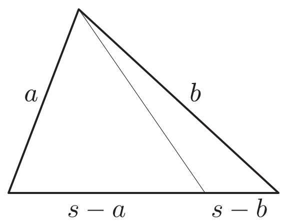
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

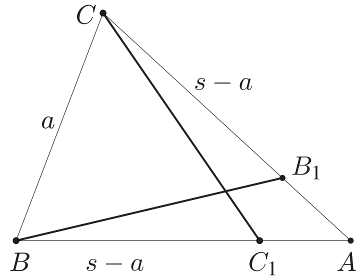
Megoldások és javítási útmutató

1. Egy háromszögben nevezzük *kerületfelezőnek* az olyan szakaszokat, amelyek a háromszög egy csúcsát úgy kötik össze a szemközti oldal egy pontjával, hogy a szakasz két oldalára a háromszög kerületének ugyanakkora része esik. Igaz-e, hogy ha egy háromszög nem egyenlő szárú, akkor kerületfelező szakaszai mind különböző hosszúságúak?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges háromszög mindegyik csúcsához tartozik kerületfelező. Ehhez csak azt kell látni, hogy $s-a$ és $s-b$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt pozitív, továbbá $s - a + s - b = 2s - a - b = a + b + c - a - b = c$. Tehát a c hosszúságú oldalt a felé $s - a$, b felé $s - b$ hosszú szakaszra bontva megkapjuk a c oldalhoz tartozó kerületfelezőt. 2 pont



Most azt fogjuk igazolni, hogy ha van két egyenlő hosszúságú kerületfelező, akkor van két egyenlő oldal. Tehát ha minden oldal különböző, akkor minden kerületfelező is különböző hosszúságú. 2 pont



Tegyük fel, hogy a BB_1 és CC_1 kerületfelezők egyenlők: $BB_1 = CC_1$. A fentiek alapján $BC_1 = CB_1 = s - a$, mert mindkettő a-t egészíti ki a kerület felére. 1 pont

Az eddigiek alapján a BCC_1 és CBB_1 háromszögek egybevágók, mert mindhárom oldaluk megegyezik. Ebből viszont $CBC_1\sphericalangle = BCB_1\sphericalangle$ következik, vagyis az eredeti háromszög egyenlő szárú, mert van két egyenlő szöge. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. A másodfokú $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ polinom minden x-re teljesíti az alábbi összefüggést:

$$p(x) = \left(\frac{p(x+1) - p(x-1)}{2}\right)^2.$$

Add meg a következő összeg pontos értékét! $S = p(-3) - 2p(0) + p(3) = ?$

Megoldás. Írjuk fel a megadott kifejezés jobb oldalát az a, b, c együtthatók segítségével!

$$\left(\frac{p(x+1) - p(x-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(a(x-1)^2 + b(x-1) + c\big)}{2}\right)^2.$$ 1 pont

Rendezzük!

$$\left(\frac{\big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(a(x-1)^2 + b(x-1) + c\big)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\big(ax^2 + 2ax + a + bx + b + c\big) - \big(ax^2 - 2ax + a + bx - b + c\big)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{4ax + 2b}{2}\right)^2 = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2.$$ 2 pont

Mivel ez minden x-re megegyezik a $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinommal, ez csak úgy lehet, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek, vagyis

$$a = 4a^2 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{1}{4} \quad (a \neq 0 \text{ miatt!})$$

$b = 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{4}b = b$, vagyis b tetszőleges, és végül $c = b^2$.

Vagyis a $p(x)$ polinom $p(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + bx + b^2$ alakú valamely b valós számra. 2 pont

Ekkor az $S = p(-3) - 2p(0) + p(3)$ kifejezés értéke:

$$S = \left(\frac{1}{4}(-3)^2 - 3b + b^2\right) - 2b^2 + \left(\frac{1}{4}3^2 + 3b + b^2\right) = \frac{9}{2}.$$

Vagyis az S összeg értéke: $S = 4{,}5$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

Megoldás. Először megjegyezzük, hogy lehet olyan nyolcszöget rajzolni, amelynek átlóegyenesei között nincsenek párhuzamosak, és sem a sokszög belsejében, sem a sokszögön kívül nem megy át három átlóegyenes egy ponton.

Például ha a nyolcszög csúcsait egy kör kerületén vesszük fel egymás után, valamilyen körüljárás szerinti sorrendben, akkor a konvexitás teljesül. Az első három pontot tetszőlegesen felvehetjük. Ezután a soron következő pont választásakor mindig csak véges sok lehetőséget zár ki, hogy nem keletkezhet a korábbi átlókkal párhuzamos szakasz, és olyan sem, ami két korábbi átló metszéspontján megy át. 1 pont

A továbbiakban tehát feltételezhetjük, hogy a nyolcszög csúcsain kívül nincs olyan pont, amelyen legalább három átló egyenese átmegy, és az átlók között nincsenek párhuzamosak.

Megszámoljuk, hogy összesen hány metszéspont lehetséges, majd ebből le fogjuk vonni a belső metszéspontok számát és a nyolcszög kerületére eső metszéspontok számát.

A nyolcszögnek $\dfrac{8\cdot 5}{2}=20$ átlója van, ezekből $\dfrac{20\cdot 19}{2}=190$ pár alkotható. 1 pont

A nyolcszög minden csúcsában öt átló találkozik, vagyis $\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$ átló pár metszi egymást egy adott csúcsban. Ez összesen $8\cdot 10=80$ pár. 1 pont

A belső metszéspontok megszámolásához a következő (ismert) gondolat használható. Ha két átló belső pontban metszi egymást, akkor az átlók végpontjai biztosan különböznek. Tehát egy belső metszésponthoz hozzárendelhető négy csúcs. Fordítva, ha kiválasztunk négy tetszőleges csúcsot, akkor ezek egy konvex négyszöget adnak meg, amelynek átlói egyben a nyolcszög átlói is, és belül metszik egymást. Tehát a belső metszéspontok és a nyolcszög csúcsai közül kiválasztható négyesek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg. Így a belső metszéspontok száma $\binom{8}{4}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}=70$. 2 pont

A 190 lehetséges pár közül 80 a sokszög kerületén metszi egymást, 70 a sokszög belsejében, tehát legfeljebb $190-80-70=40$ metszéspont eshet kívülre, és a bevezető megjegyzés alapján ez el is érhető. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Melyik az a legkisebb (tízes számrendszerben felírt) természetes szám, amelyben mind a tízféle számjegy szerepel legalább egyszer, és a szám osztható 99-cel?

(A szám nem kezdődhet 0-val!)

Megoldás. A számunk pontosan akkor osztható 99-cel, ha 9-cel, és 11-gyel is osztható.

Mivel $0 + 1 + \ldots + 8 + 9 = 45$, ezért ha a számunk 10-jegyű, és ezekből a jegyekből áll valamely sorrendben, akkor 9-cel osztható.

Ha nem találunk ilyen 11-gyel osztható számot, csak akkor van szükség arra, hogy valamely számjegyből több szerepeljen a számunkban.

(Vagyis a továbbiakban feltesszük, hogy a számunk 10-jegyű.) 1 pont

Vizsgáljuk a 11-gyel oszthatóságot (a fenti 10-jegyű számokra)!

Az oszthatósági szabály miatt a jegyek váltakozó előjelű összegének 11-gyel oszthatónak kell lenni.

Mivel a számjegyek összege 45, ez csak akkor lehet, ha a páratlan helyiértéken álló jegyek összegének (t), és a páros helyiértéken lévő számjegyek összegének (s) a különbsége ($t - s$) páratlan (különben t és s azonos paritású, így összegük páros, és így nem 45), vagyis $t - s \pm 11$, vagy ± 33. 1 pont

Ha a 10 lehetséges jegyből az 5 nagyobbat tesszük pl. a páratlan helyiértékekre, a többit pedig a páros helyiértékekre, akkor egy ilyen számra:

$$|t - s| = (9 + 8 + 7 + 6 + 5) - (4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 25,$$

vagyis $t - s = \pm 33$ nem lehet $\longrightarrow$ $t - s = \pm 11$ lehetséges csak. 1 pont

Most akkor próbáljunk ilyen számot „csinálni”, méghozzá úgy, hogy a lehetséges legkisebb 10-jegyű számot alakítjuk ki eközben!

Úgy érdemes próbálkozni, hogy a lehető legkisebb jegyet tesszük az első helyre, aztán a maradék jegyek közül a lehető legkisebbet a második helyre, és így tovább ... (Ezt a nyilvánvaló elvet később több helyen kihasználjuk.) 1 pont

Ha a számunk eleje $1023\ldots$ lenne, akkor „eddig” $t - s = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ha most a maradék hat jegyből a három nagyobbat pl. a páratlan helyekre, a többit a páros helyekre tesszük, akkor $|t - s| = (9 + 8 + 7) - (6 + 5 + 4) = 9 < 11$.

Vagyis a számunk nem kezdődhet 1023-mal. 1 pont

A számunk a lehető legkisebb akkor lehet az eddigiek alapján, ha 1024-gyel kezdődik. „Eddig” $t - s = 1 + 2 - 4 = -1$. A $|t - s| = 11$ feltétel most kielégíthető, de $(9 + 8 + 7) - (6 + 5 + 3) = 10$ miatt pontosan akkor, ha a páratlan helyiértékekre tesszük a 3, 5, 6 jegyeket, míg a páros helyiértékekre a 7, 8, 9 jegyeket.

Ezt sokféleképpen tehetnénk, de (mivel a legkisebb ilyen számot keressük) nyilván megint csak „növekvő módon” fogjuk rendezni a lehetséges jegyeinket.

Így a legkisebb lehetséges számunk az 1024375869. 1 pont

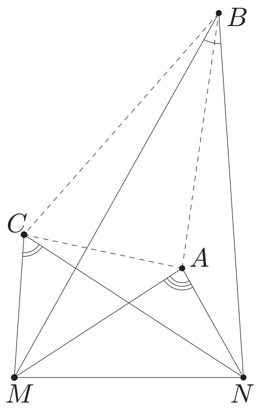
Válasz: a legkisebb ilyen szám az 1024375869.

(Ez a pont a szám indoklás nélküli megtalálásáért is jár!) 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Adott egy PQR háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúak. Az MN szakasz ugyanazon oldalára felvettük a betűzésük sorrendjében azonos körüljárású MNA, BMN és NCM háromszögeket, amelyek mind hasonlók PQR-hez. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög is hasonló PQR-hez.

Megoldás.



Először rögzítjük, hogy melyik szögek felelnek meg egymásnak. Legyen

$$P\sphericalangle = AMN\sphericalangle = NBM\sphericalangle = MNC\sphericalangle;$$

$$Q\sphericalangle = MNA\sphericalangle = BMN\sphericalangle = NCM\sphericalangle;$$

$$R\sphericalangle = NAM\sphericalangle = MNB\sphericalangle = CMN\sphericalangle.$$

Az oldalak különböznek, ezért feltehetjük, hogy a következő relációk igazak: $P\sphericalangle < Q\sphericalangle < R\sphericalangle$.

Az áttekinthetőség kedvéért az ábrán nem jelöltük meg mind a kilenc szöget.

Nevezzük el az AMN háromszög oldalait: $MN = a$, $NA = m$, $AM = n$. Ezekkel a szakaszokkal kifejezzük a BN, BM, CN és CM szakaszokat. A háromszögek hasonlóságából $a : m : n = BM : a : BN = CN : CM : a$ következik. 1 pont

A megfelelő arányokból $BN = \dfrac{an}{m}$, $BM = \dfrac{a^2}{m}$, $CN = \dfrac{a^2}{n}$ és $CM = \dfrac{am}{n}$. 2 pont

Az MN szakaszra rajzolt háromszögek szögei is megegyeznek a hasonlóságok miatt, így $CMB\sphericalangle = CMN\sphericalangle - BMN\sphericalangle = BNM\sphericalangle - ANM\sphericalangle = BNA\sphericalangle$. Tehát CM és MB ugyanakkora szöget zár be, mint AN és NB, továbbá

$$\frac{CM}{BM} = \frac{\frac{am}{n}}{\frac{a^2}{m}} = \frac{m^2}{an} = \frac{m}{\frac{an}{m}} = \frac{AN}{BN}.$$

Azt kaptuk, hogy $CMB_\triangle \sim ANB_\triangle$. 2 pont

Az előbbi kivonásoknál kihasználtuk szögek feltételezett nagyságrendjét, de a többi sorrendnél ugyanígy kapjuk az egyenlőséget.

Végül vegyük észre, hogy a $CMB_\triangle \sim ANB_\triangle$ hasonlóság miatt $CBM\sphericalangle = ABN\sphericalangle$, tehát $CBA\sphericalangle = MBN\sphericalangle$, továbbá $\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{MB}{NB}$. Ez a két összefüggés maga után vonja, hogy $CBA_\triangle \sim MBN_\triangle$. Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az utolsó szakaszban újra használtuk a szögek rendezését ahhoz, hogy BA ugyanolyan irányban van BN-től, mint BC, BM-től.