Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy ötjegyű szám minden számjegye különböző. Erre a számra $n = 2$, 3, 4 és 5 esetén egyaránt teljesül, hogy bárhogyan választunk ki benne n db szomszédos számjegyet, az ezek összeolvasásával kapott n-jegyű szám osztható lesz n-nel. Melyek ezek az ötjegyű számok?

2. Adott 10 olyan különböző 2-hatvány, amelyek mindegyikében a 2 kitevője egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a számok szorzata ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban szorzat értéke maga a szám.)

3. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalának az AB oldallal alkotott metszéspontja T. Tükrözzük a T pontot a BC oldal egyenesére, a kapott pont legyen R. Húzzunk az R ponton keresztül párhuzamost a CT magassággal, az így kapott egyenes az AC oldal egyenesét metssze Q, a BC oldal egyenesét P pontban.

Bizonyítsuk be, hogy a PT egyenes pontosan akkor merőleges az AC egyenesre, ha az ABC háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AB és AC oldalai egyenlő hosszúságúak.

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy ötjegyű szám minden számjegye különböző. Erre a számra $n = 2$, 3, 4 és 5 esetén egyaránt teljesül, hogy bárhogyan választunk ki benne n db szomszédos számjegyet, az ezek összeolvasásával kapott n-jegyű szám osztható lesz n-nel. Melyek ezek az ötjegyű számok?

Megoldás. Legyen az ötjegyű szám: $\overline{abcde}$.

Ekkor a feladat feltételei szerint $2 \mid \overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ és $\overline{de}$. Így b, c, d és e páros számjegyek és $5 \mid \overline{abcde}$, így e csak 0 lehet.

$4 \mid \overline{bcde}$ bármilyen páros d számjegy választása mellett teljesülne, de $4 \mid \overline{abcd}$-nek is teljesülnie kell, ami pontosan akkor teljesül, ha $4 \mid \overline{cd}$. Mivel c-ről korábban már megállapítottuk, hogy páros, így d értéke csak 4 vagy 8 lehet, azaz $\overline{cd}$ értéke 24, 28, 48, 64, 68 vagy 84 lehet.

Tehát a szám végződése a $3 \mid \overline{cde}$ feltételt is figyelembe véve csak 240 vagy 840 vagy 480 lehet.

Emellett $3 \mid \overline{bcd}$, tehát $3 \mid b + 6$ vagy $3 \mid b + 12$, amiből b értékére az egyetlen lehetőség: $b = 6$. Tehát a szám végződése 6240 vagy 6480 vagy 6840.

Végül csak azt kell biztosítani, hogy $3 \mid \overline{abc}$ teljesüljön. Ez pontosan akkor teljesül, ha $3 \mid a+b+c = a+6+c$, tehát $3 \mid a+c$, azaz $c=2$ esetén $a=1$ vagy 7, $c=4$ esetén $a=2$ vagy 5 és $c=8$ esetén $a=1$ vagy 7.

Tehát a keresett számok: 16 240, 16 840, 26 480, 56 480, 76 240 és 76 840.

	a	b	c	d	e
1.	1	6	2	4	0
2.	7	6	2	4	0
3.	2	6	4	8	0
4.	5	6	4	8	0
5.	1	6	8	4	0
6.	7	6	8	4	0

2. Adott 10 olyan különböző 2-hatvány, amelyek mindegyikében a 2 kitevője egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a számok szorzata ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban szorzat értéke maga a szám.)

Megoldás. A hatványozás azonosságai miatt a feladat átfogalmazható:

Tegyük fel, hogy adott tíz 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportra oszthatók, amelyekben a számok összege ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban az összeg értéke ez a szám.)

Egy 10 elemű halmaznak 2^{10} $(= 1024)$ részhalmaza van.

10 darab 100-nál kisebb pozitív egész szám összege legalább 55 és legfeljebb 945 lehet, azaz a 10 számból képzett összegek legfeljebb 891 különböző értéket vehetnek fel. (Az is elég, ha helyesen indokolja, hogy a lehetséges összegek száma kevesebb, mint 1024.)

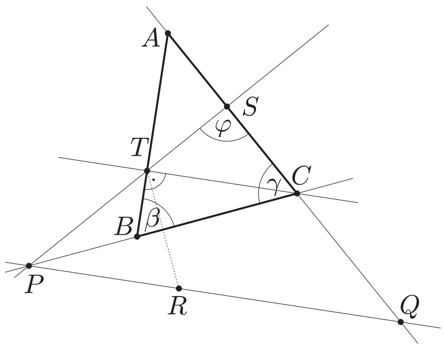
Mivel a lehetséges értékek száma kevesebb, mint a részhalmazok száma, így a skatulyaelv értelmében kell lennie két olyan részhalmaznak, amelyekben szereplő számok összege ugyanannyi.

Hagyjuk el ennek a két halmaznak a közös elemeit! Az így kapott halmazok közül egyik sem lehet üres, mivel ez azt jelentené, hogy az egyik halmaz tartalmazza a másikat, ami lehetetlen, hiszen elemeik összege egyenlő. Az így kapott halmazokban szereplő számok összege továbbra is egyenlő lesz, azaz ezek a számok megfelelnek a feladat követelményeinek.

3. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalának az AB oldallal alkotott metszéspontja T. Tükrözzük a T pontot a BC oldal egyenesére, a kapott pont legyen R. Húzzunk az R ponton keresztül párhuzamost a CT magassággal, az így kapott egyenes az AC oldal egyenesét metssze Q, a BC oldal egyenesét P pontban.

Bizonyítsuk be, hogy a PT egyenes pontosan akkor merőleges az AC egyenesre, ha az ABC háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AB és AC oldalai egyenlő hosszúságúak.

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Jelölje a PT és AC egyenesek metszéspontját S, és vezessük be a $\beta = ABC\sphericalangle$, $\gamma = BCA\sphericalangle$ és $\varphi = PSC\sphericalangle$ jelöléseket! Megmutatjuk, hogy $\varphi = 90°$ pontosan akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$, vagyis az ABC háromszögben $AB = AC$.

A CT és PR egyenesek párhuzamossága miatt $TCB\sphericalangle$ és $CPR\sphericalangle$ váltószögek, továbbá a T és R pontoknak a PC egyenesre való szimmetriája alapján $CPS\sphericalangle = CPR\sphericalangle$. Mivel $CTB\sphericalangle = 90°$, ezért azt kapjuk, hogy $CPS\sphericalangle = TCB\sphericalangle = 90° - \beta$.

Ekkor a CPS háromszögben $\varphi = 180° - (90° - \beta) - \gamma = 90° - (\gamma - \beta)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi = 90°$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$.