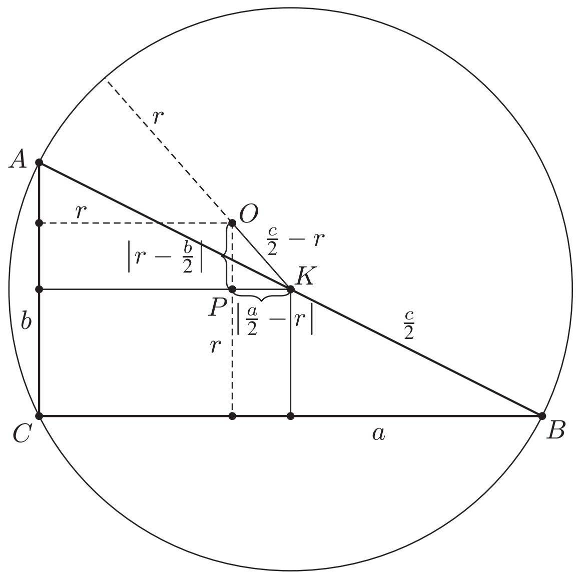
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a és b befogójú derékszögű háromszögnek megrajzoltuk a köré írt körét. Fejezzük ki a és b segítségével annak a körnek a sugarát, amely érinti a háromszög befogóit és a köré írt kört belülről.

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Legyen a derékszögű háromszög átfogójának hossza $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Thalész-tételének megfordítása miatt a köré írt kör középpontja az átfogó K felezőpontja, sugara pedig $\dfrac{c}{2}$. 1 pont

Jelölje a keresett kör középpontját O, sugarát pedig r. Ez belülről érint a köré írt kört, ezért az érintési pont és a körök középpontjai egy egyenesre esnek, vagyis $OK = \dfrac{c}{2} - r$. 1 pont

Az O-ból a-ra állított merőleges egyenes és a K-ból b-re állított merőleges egyenes metszéspontját jelölje P. K pontnak a befogóktól vett távolsága $\dfrac{a}{2}$, illetve $\dfrac{b}{2}$, O pedig mindkét befogótól r távolságra van (hisz a keresett kör érinti azokat), ezért az OPK derékszögű háromszögben $PK = \left|\dfrac{a}{2} - r\right|$ és $OP = \left|r - \dfrac{b}{2}\right|$. (Az előjel attól függően változik, hogy az O pont hová esik K-hoz képest.) 1 pont

Ebben a háromszögben Pitagorasz-tétele szerint:

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(r-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{2}-r\right)^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{a^2}{4}-ar+r^2+r^2-br+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}-cr+r^2,$$

ami rendezés után:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}+r^2-r(a+b-c)=0.$$ 2 pont

Az első tag $c=\sqrt{a^2+b^2}$ miatt 0, tehát az r-ben másodfokú $r^2-r(a+b-c)=0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Ennek két megoldása $r=0$ és $r=a+b-c$, előbbi nyilván nem megoldás, tehát a keresett kör sugara $r=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. 1 pont

Megjegyzés: Mivel a derékszögű háromszög beírt körének sugaráról tudjuk, hogy éppen $\frac{a+b-c}{2}$, eredményünkből az is következik, hogy a keresett kör épp a derékszögű csúcsból a háromszög beírt körének kétszeresére nagyított képe.

Összesen: 7 pont

2. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n=\begin{cases} a_1=2, \\ a_{n+1}=\frac{3}{n}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n) \quad (n\geqq 1). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a_n egész minden n-re, viszont nem teljes hatvány semmilyen n-re (vagyis nem egy egész szám valamely 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)!

Megoldás. A sorozat első néhány tagja:

$$a_2=\frac{3}{1}\cdot 2=2\cdot 3, \quad a_3=\frac{3}{2}\cdot(2+6)=12=3\cdot 4, \quad a_4=\frac{3}{3}\cdot(2+6+12)=20=4\cdot 5.$$

A tagok felírása után adódhat az a sejtés, hogy a sorozat megadható direkt módon is, és a képzési szabály: $a_n=n\cdot(n+1)$. 1 pont

Ezt a részeredményt bebizonyítjuk (mondjuk teljes indukcióval).

Lemma: $a_n=n\cdot(n+1)$.

I.) (*Bázis.*) $n=1$ (2, 3, 4) esetén igaz az állítás, korábban már megvizsgáltuk.

II.) (*Indukciós feltétel.*) Tegyük fel, hogy egy bizonyos pozitív egész k-ig már igazoltuk az állítást, vagyis $a_k=k\cdot(k+1)$.

III.) Kérdés, hogy következik-e, hogy ekkor igaz az állítás $n=k+1$-re is?

Ekkor

$$a_{k+1}=\frac{3}{k}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)=\frac{3}{k}\cdot\big((a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})+a_k\big).$$

Innen – mivel a definíció szerint $a_k = \frac{3}{k-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})$ – a belső zárójel helyettesíthető, vagyis:

$$a_{k+1} = \frac{3}{k} \cdot \left(\left(\frac{k-1}{3} \cdot a_k \right) + a_k \right) = \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{k+2}{3} \cdot a_k \right) =$$

$$= \frac{3}{k} \cdot \frac{k+2}{3} \cdot k \cdot (k+1) = (k+1)(k+2).$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. 3 pont

Mivel $a_n = n \cdot (n+1)$ két pozitív egész szám szorzata, nyilván maga is egész. 1 pont

Másfelől $a_n = n \cdot (n+1)$ két egymást követő pozitív egész szorzata. Két egymást követő pozitív egész viszont egymáshoz relatív prím. 1 pont

Vagyis, ha egy p prímre $p \mid n$, akkor $p \nmid (n+1)$, és ez fordítva is igaz.

Azaz, ahhoz, hogy $a_n = n \cdot (n+1)$ egy pozitív egész teljes m-edik ($m > 1$) hatványa legyen, az kellene, hogy mind n, mind $(n+1)$ teljes m-edik hatvány legyen.

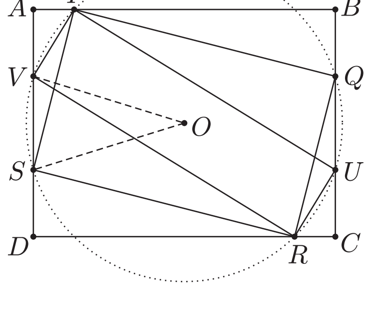
Viszont két szomszédos pozitív m-edik hatvány között legalább három a különbség, vagyis a_n valóban nem teljes hatvány. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Egy téglalapot akkor nevezünk egy másik téglalapba *beírtnak,* ha csúcsai a másik téglalap különböző oldalainak belső pontjai. Egy $ABCD$ téglalapba két téglalapot írtunk, amelyeknek van egy közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy a két beírt téglalap területének összege egyenlő az $ABCD$ téglalap területével!

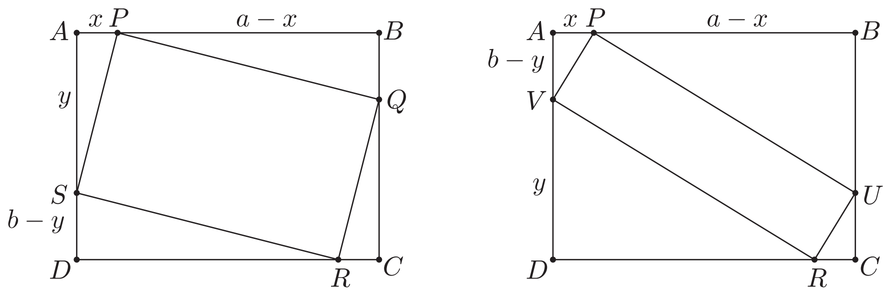
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a beírt téglalapok középpontja szükségszerűen egybeesik az $ABCD$ téglalap középpontjával. Legyen a beírt téglalap AB-re eső pontja P, CD-re eső pontja pedig R. A beírt téglalap középpontja a PR szakasz felezőpontja, ezért rajta van AB és CD középpárhuzamosán. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy a szóban forgó középpont BC és DA középpárhuzamosán is rajta van. A két észrevétel együtt azt adja, hogy a beírt téglalap középpontja az $ABCD$ téglalap középpontjával azonos. 2 pont



Legyen a feltételben megadott közös csúcs az AB oldal P belső pontja. Az előző észrevételünk alapján ekkor az az R pont is csúcsa mindkét beírt téglalapnak, amelyet úgy kapunk, hogy P-t tükrözzük az $ABCD$ téglalap O középpontjára.

Thalész tétele miatt a beírt téglalapok csúcsai a PR szakasz, mint átmérő fölé írt körre esnek. Mivel ez a kör legfeljebb két pontban metszheti az AD oldalt, így legfeljebb két különböző beírt téglalap létezik, amelynek P az egyik csúcsa. Továbbá az is igaz, hogy ha a két beírt téglalap AD-re eső csúcsa S és V, akkor SVO egyenlő szárú, ezért S és V az AD oldal felezőpontjára szimmetrikus. 2 pont

Vezessük be az alábbi ábra jelöléseit, és fejezzük ki a beírt téglalapok területét úgy, hogy az $ABCD$ téglalapból levágott derékszögű háromszögek területét összegezzük ($AB = a$, $BC = b$, $AP = RC = x$, $AS = CQ = DV = BU = y$).



A szemközt levágott derékszögű háromszögeket téglalappá egyesítve kapjuk az alábbiakat:

$$T_{PQRS} = ab - xy - (a-x)(b-y) \quad \text{és} \quad T_{PURV} = ab - x(b-y) - y(a-x). \qquad \text{1 pont}$$

Összegezve:

$$\begin{aligned} T_{PQRS} + T_{PURV} &= ab - xy - (a-x)(b-y) + ab - x(b-y) - y(a-x) \\ &= 2ab - \big(xy + (a-x)y + x(b-y) + (a-x)(b-y)\big) \\ &= 2ab - \big(x + (a-x)\big)\big(y + (b-y)\big) \\ &= 2ab - ab = ab = T_{ABCD}. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

Összesen: 7 pont

4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_7$ nemnegatív számok összege 1. Tekintsük az alábbi öt mennyiséget: $a_1 + a_2 + a_3$, $a_2 + a_3 + a_4$, $a_3 + a_4 + a_5$, $a_4 + a_5 + a_6$, $a_5 + a_6 + a_7$. Jelölje ezen öt érték maximumát M. Mekkora lehet M legkisebb értéke?

1. megoldás. $a_1 = a_4 = a_7 = \frac{1}{3}$, $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$ választással mind az öt összeg értéke $\frac{1}{3}$, ekkor tehát $M = \frac{1}{3}$. 2 pont

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy M értéke ennél kisebb nem is lehet:

Tegyük fel, hogy léteznek olyan, a feltételeknek eleget tevő $a_1, a_2, \ldots, a_7$ számok, melyek esetén $M < \frac{1}{3}$, vagyis mind az öt vizsgált összeg kisebb $\frac{1}{3}$-nál. 1 pont

Ekkor az $a_1 + a_2 + a_3 < \frac{1}{3}$, $a_3 + a_4 + a_5 < \frac{1}{3}$ és $a_5 + a_6 + a_7 < \frac{1}{3}$ egyenlőtlenségek összeadásával az $a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + 2a_5 + a_6 + a_7 < 1$ egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

Tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1$, ennek figyelembevételével az előző egyenlőtlenségből $a_3 + a_5 < 0$ adódik, 1 pont
ami azonban lehetetlen, hisz nemnegatív számok összege nem lehet negatív. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát $M < \frac{1}{3}$ valóban nem lehetséges, tehát M legkisebb értéke $\frac{1}{3}$ lehet. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Írjuk fel a két „hiányzó” összeget is, vagyis $a_6 + a_7 + a_1$-et és $a_7 + a_1 + a_2$-t. Ezekre teljesülnek az

$$a_6 + a_7 + a_1 \leqq (a_5 + a_6 + a_7) + (a_1 + a_2 + a_3) \leqq 2M$$

és az

$$a_7 + a_1 + a_2 \leqq (a_5 + a_6 + a_7) + (a_1 + a_2 + a_3) \leqq 2M$$

becslések. 2 pont

Ezekkel együtt a hét összeg összege egyrészt

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7) +$$
$$+ (a_6 + a_7 + a_1) + (a_7 + a_1 + a_2) = 3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = 3$$ 1 pont

másrészt

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7) +$$
$$+ (a_6 + a_7 + a_1) + (a_7 + a_1 + a_2) \leqq M + M + M + M + M + 2M + 2M = 9M,$$

ahonnan $3 \leqq 9M$, tehát $\frac{1}{3} \leqq M$. 2 pont

Az egyenlőség meg is valósítható, ugyanis az $a_1 = a_4 = a_7 = \frac{1}{3}$, $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$ választással mind az öt összeg, tehát M értéke is $\frac{1}{3}$, vagyis M legkisebb értéke valóban $\frac{1}{3}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Két pozitív egész szám hasonló, ha

– a két szám (*tízes számrendszerbeli alakjában*) ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza;

– a két számban a közös számjegyek darabszáma azonos;

– valamint egyik szám sem tartalmazza a 0-s számjegyet.

(Pl. hasonlóak a 1454412, és a 4441125, de hozzájuk nem hasonló az 1245 szám.)

Van-e három olyan 2016-jegyű A, B, C szám, hogy A hasonló B-vel, A hasonló C-vel, és $C = A + B$?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy vannak a feltételeknek megfelelő A, B, C számok.

Először keressünk „kicsi" ilyen számokat. A feltételek miatt B is hasonló C-vel. Ha A, B, C 9-es maradékait vizsgáljuk, adódik, hogy – a 9-cel való oszthatósági szabály miatt – a három szám azonos maradékot ad 9-cel osztva. 1 pont

Mivel $A + B = C$, ez csak úgy lehet, ha mind a három szám 9-cel osztható. 1 pont

Könnyen látható, hogy egyjegyű, és kétjegyű ilyen számok nincsenek. 1 pont

Háromjegyű számokat már találhatunk. Először próbálkozzunk olyan háromjegyű számokkal, ahol a számjegyösszeg: $a + b + c = 9$.

Legyenek A, B, C jegyei valamilyen sorrendben a, b, c (a jegyek között lehetnek azonosak is akár)!

Konkrétan: $A = \overline{abc}$, $B = \overline{a'b'c'}$ és $C = \overline{a''b''c''}$, ahol a $'$-s, és $''$-s jegyek az a, b, c jegyek valamilyen permutációi.

Mivel a jegyek összege 9, ezért $c = 9 - a - b$, $c' = 9 - a' - b'$, $c'' = 9 - a'' - b''$.

A, B utolsó jegyeinek összege vagy C utolsó jegye, vagy attól 10-zel több, vagyis

$$18 - a - b - a' - b' \equiv 9 - a'' - b'' \pmod{10}, \quad \text{innen}$$
$$18 - a - b - a' - b' - c'' \equiv 9 - a'' - b'' - c'' = 0 \pmod{10}, \quad \text{majd}$$
$$18 \equiv a + b + a' + b' + c'' \pmod{10} \quad \text{adódik.}$$

Innen két eset lehet, az egyik, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C mind a három jegye előfordul, ekkor – mivel ezek összege 9 – a maradék két számjegy (az általánosság megszorítása nélkül mondjuk a, b') összege is $a + b' = 9$. Mivel az összeg páratlan, ezért itt két különböző jegyről van szó, viszont ekkor a harmadik jegy okvetlenül 0, ami ellentmondás.

A másik eset, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C három jegye közül pontosan kettő fordul elő, egyik 3-szor, a másik 2-szer. Ez azt jelenti – megint az általánosság megszorítása nélkül –, hogy $18 \equiv 3a + 2b \pmod{10}$. Vagyis $3a + 2b$ vagy 8 vagy 18 vagy 28 vagy 38.

Ha $8 = 3a + 2b \to$ a páros csak $a = 2$, $b = 1 \to c = 6$ lehet, ez nem ad eredményt.

Ha $18 = 3a + 2b \to 3 \mid b$ csak $b = 3 \to a = 4$, $c = 2$ és $b = 6 \to a = 2$, $c = 1$ lehet, ezek sem adnak eredményt.

Ha $28 = 3a + 2b \to 27 < 28 = 3a + 2b < 3(a + b) \to 9 < a + b$ vagyis ekkor már túl nagy lenne a számjegyek összege. (A 38-as eset ugyanígy!)

Vagyis nincsenek olyan háromjegyű számok, ahol a számjegyösssszeg 9. 1 pont

Végül, ha a számaink háromjegyűek, és a számjegyösszeg 18, akkor már találunk megoldást:

$$18 = 9+8+1 = 9+7+2 = 9+6+3 = 9+5+4 = 8+8+2 = 8+7+3 =$$
$$= 8+6+4 = 8+5+5 = 7+7+4 = 7+6+5 = 6+6+6$$

felbontások lehetnek jók.

Ezek közül (a számjegyek további vizsgálatával – pl. a végződések, illetve a számok első jegyeinek a vizsgálatával) csak a $18 = 9+5+4$ jöhet szóba.

Kis próbálkozás után $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ három megfelelő szám. 1 pont

Az $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ számokból többféle módon tudunk megfelelő 2016-jegyű számokat csinálni.

I.) Pl. (mivel $2016 = 3 \cdot 672$)

$$A = 459459459\dots459, \quad B = 495495\dots495 \quad \text{és} \quad C = 954954\dots954$$

megfelelő három szám (minden szám 672 blokkból áll).

II.) Pl.

$$A = 499\dots9959, \quad B = 499\dots995 \quad \text{és} \quad C = 99\dots9954$$

is megfelelő (mind a három számban pontosan 2014 darab 9-es jegy van). 2 pont

Ha a diák megtalál megfelelő számokat, és az A, B, C számokról meg is mutatja, hogy megfelelnek a feltételeknek, kapja meg a 7 pontot, puszta eredményközlésért – ha a kapott eredményt nem ellenőrzi – csak az utolsó rész 2 pontját kapja.

Összesen: 7 pont