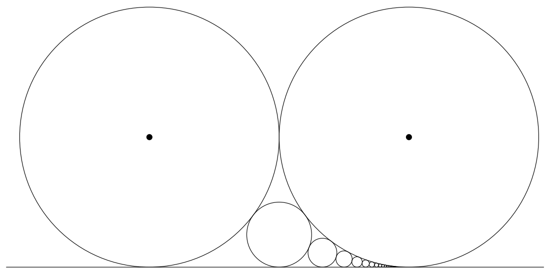
Bolyai János
Matematikai Társulat

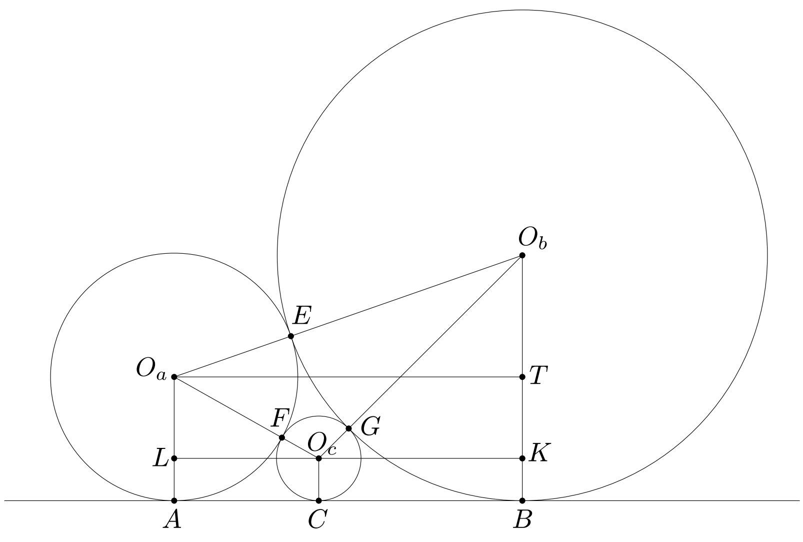
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
3. (döntő) forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Két egységsugarú kör – k_0 és k_1 – érinti egymást és egy egyenest. Berajzoltuk azt a legnagyobb k_2 kört, amelyik a k_0-t és k_1-et is, és az egyenest is érinti. Majd berajzoltuk a k_1, k_2 és az egyenes közé rajzolható legnagyobb k_3 kört. És így folytatjuk tovább. Mekkora a k_{2017} sugara?



Megoldás. Először általánosan nézzük meg, hogy két egymást és egy közös egyenest érintő körök közé mekkora sugarú legnagyobb kör írható be. A kör sugara akkor a legnagyobb, ha érinti a két kört, és az egyenest.



Legyen az ábra jelöléseit használva O_a középpontú kör sugara a, O_b középpontú kör sugara b, a keresett O_c középpontú kör sugara c.

Legyenek az O_a, O_b és O_c középpontok merőleges vetületei az egyenesen rendre A, B és C. O_a-ból és O_c-ből bocsássunk merőlegeseket AO_a-ra, és BO_b-re.

A középpontokat összekötve az érintési pontokon áthaladó szakaszokat kapunk.

A keletkezett LO_aO_c, KO_cO_b és O_aTO_b derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével kifejezhető az egyenessel párhuzamos oldal:

$$\begin{aligned} LO_c &= \sqrt{(a+c)^2-(a-c)^2} = 2\sqrt{ac}\,, \\ KO_c &= \sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2} = 2\sqrt{bc}\,, \\ O_aT &= \sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2} = 2\sqrt{ab}\,, \\ O_aT &= KO_c + LO_c. \end{aligned}$$

1 pont

Behelyettesítve kapjuk:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{bc} + \sqrt{ac}\,.$$

1 pont

Majd $\sqrt{abc}$-vel leosztva:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\,.$$

1 pont

Azaz $r_0 = 1$ és $r_1 = 1$-et behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r_2}} &= 1+1 = 2, \\ r_2 &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{\sqrt{r_3}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1} = 3, \\ r_3 &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

1 pont

Az első néhány eset után a sejtés, hogy $r_n = \dfrac{1}{n^2}$. 1 pont

Tegyük fel, hogy n-re igaz, és vizsgáljuk meg $(n+1)$-re:

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} + 1 = n+1.$$

Azaz $r_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, az állítást igazoltuk. 1 pont

Tehát $r_{2017} = \dfrac{1}{2017^2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Adott egy ötelemű halmaz, a halmaz elemei különböző egész számok. Vegyük minden részhalmaza esetén a részhalmaz elemeinek összegét. Maximum hányszor fordulhat elő a 7 az ilyen összegek között?

Megoldás. 1 db egyelemű ilyen halmaz lehet.

Ha két ilyen kételemű halmaznak egy közös eleme lenne, akkor az összegfeltétel miatt a két elem megegyezne ($a+b=b+c=7$ esetén $a=c$ lenne).

Tehát diszjunkt kételemű halmazok kellenek, ilyenekből 2 van. 1 pont

Háromelemű halmazok max. 1 elemben egyezhetnek meg az összegfeltétel miatt ($a+b+c= = d+b+c=7$ esetén $a=d$ lenne).

Ezért max. 2 háromelemű halmaz lehetséges egy közös elemmel. A harmadik háromelemű halmaznak valamelyikkel legalább kettő közös eleme lenne.

Két négyelemű halmazunk max. két elemben egyezhet meg, ezért 5 elemű alaphalmaznál egy 4 elemű halmaz van csak.

Ötelemű halmazból legfeljebb 1 van, tehát összesen max. $1+2+2+1+1=7$ ilyen részhalmaz lehet. 1 pont

Akkor kaphatnánk 7 részhalmaz elemeinek összegeként 7-et, ha lenne 1 darab ötelemű, 1 db négyelemű és 2 darab háromelemű 7 összegű halmazunk.

$a+b+c+d+e=7$ és $a+b+c+d=7$-ből $e=0$ következik. 1 pont

A háromelemű halmazok nem lehetnek $\{a;b;c;d\}$ részhalmazai, mert ekkor az összeg nem lehet 7. Ezért a két háromelemű közös eleme a 0 és a, b, c, d közül egyik is tartalmaz kettő elemet (például a, b), a másik a maradék kettő elemet (például c, d). 1 pont

De ez lehetetlen, mert ekkor $a+b+c+d=14$ lenne, tehát nem lehet 7, legfeljebb csak 6 megfelelő részhalmaz. 1 pont

Egy ötelemű halmaz, melynek 6 db 7 összegű részhalmaza van például a $\{-3;0;3;4;7\}$. 1 pont

A megfelelő részhalmazok: $\{7\}$, $\{0;7\}$, $\{3;4\}$, $\{-3;3;7\}$, $\{0;3;4\}$ és $\{-3;0;3;7\}$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Megoldás. A bal oldalon szereplő nevező miatt $x > 0$ feltételnek kell teljesülnie. A jobb oldalon lévő gyök alatti másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért a kifejezés minden x-re pozitív. 1 pont

Alakítsuk át a bal oldalt úgy, hogy a számlálóban lévő összeg mindkét tagját osztjuk $\sqrt{x}$-szel:

$$3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$ 1 pont

Tudjuk (a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján), hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege mindig $\geqq 2$, így az egyenlet bal oldala mindig nagyobb-egyenlő 6-nál. 2 pont

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha ez a jobb oldalra is igaz, azaz

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \geqq 2.$$ 1 pont

Mivel mindkét oldal és a nevező is nem negatív, ezért beszorozhatunk és négyzetre emelhetünk. 1 pont

Kapjuk: $x^2+2x+1 \geqq 4x^2-4x+4$, rendezve: $0 \geqq 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha $x = 1$. 1 pont

Behelyettesítéssel megmutatjuk, hogy ez valóban megoldása az egyenletnek. 1 pont

---

Összesen: 7 pont