Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszögben az AB és BC oldalakra kifelé $ABDE$, illetve $BCFG$ négyzeteket szerkesztünk, majd megrajzoljuk a DG egyenest. Azt vesszük észre, hogy a DG egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

Mekkora a háromszög BC oldala, ha tudjuk, hogy $AB = 10$ cm és $\alpha = 50°$? **10 pont**

2. Négy házaspár tagjait három csoportba osztjuk be úgy, hogy senki se kerüljön a párjával egy csoportba. Hányféleképpen tehető ez meg? (A személyeket megkülönböztetjük, a csoportokat nem. Csoport nem maradhat üresen.) **10 pont**

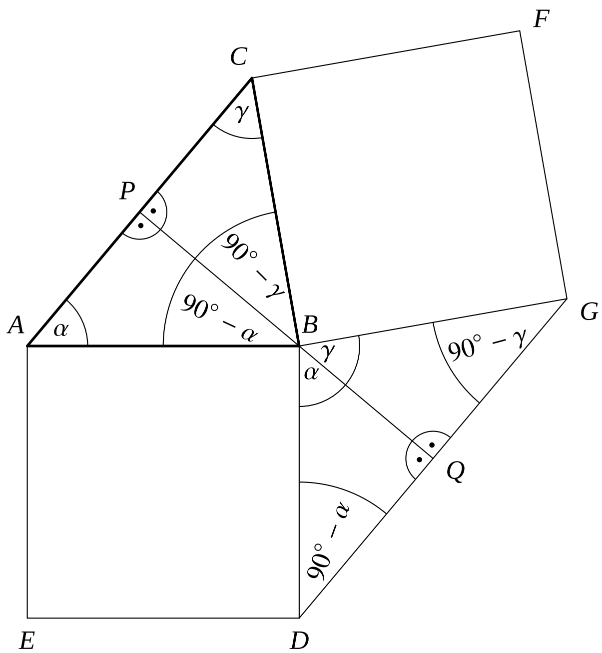
3. Dávid választ két különböző a és b pozitív egész számot, majd felírja a füzetébe az a, $a + 2$, b, $b + 2$ számokat. Ezután képezi az összes páronkénti szorzatot, és a kapott hat számot felírja a táblára. Hány négyzetszám kerülhet fel a táblára? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszögben az AB és BC oldalakra kifelé $ABDE$, illetve $BCFG$ négyzeteket szerkesztünk, majd megrajzoljuk a DG egyenest. Azt vesszük észre, hogy a DG egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

Mekkora a háromszög BC oldala, ha tudjuk, hogy $AB = 10$ cm és $\alpha = 50°$? **10 pont**

Megoldás: Készítsünk ábrát, és jelöljük a háromszög C-nél lévő szögét γ-val! 1 pont



A B csúcsból állítsunk merőlegest az AC oldalegyenesre! Az AC és DG egyenesek párhuzamossága miatt ez az egyenes a DG egyenesre is merőleges helyzetű. A kapott metszéspontokat az ábra szerint jelöljük P-vel és Q-val! 1 pont

Az ABP és BDQ derékszögű háromszögek átfogói $AB = BD$ miatt egyenlő hosszúak. Ezenkívül

$$QBD = 180^\circ - ABP - DBA =$$
$$= 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$$

(itt hivatkozhatunk arra is, hogy $QBD\sphericalangle$ és $PAB\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek), így a szóban forgó két derékszögű háromszög szögei is megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó. 2 pont

Az egybevágóság alapján a $90^\circ - \alpha$ nagyságú szöggel szemközti befogók egyenlő hosszúak, ezért $PA = QB$. 1 pont

Hasonló gondolatmenettel látható, hogy a BCP és GBQ derékszögű háromszögekben $BC = GB$ és $GBQ\sphericalangle = \gamma$, így ez a két háromszög is egybevágó, ezért $PC = QB$. 2 pont

Az előbbiekből adódóan $PA = PC$, tehát az ABC háromszögben a BP magasságvonal és egyben oldalfelező merőleges is, ami azt jelenti, hogy a háromszög egyenlő szárú és $AB = CB$. 2 pont

A háromszög BC oldala tehát 10 cm hosszúságú. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Négy házaspár tagjait három csoportba osztjuk be úgy, hogy senki se kerüljön a párjával egy csoportba. Hányféleképpen tehető ez meg? (A személyeket megkülönböztetjük, a csoportokat nem. Csoport nem maradhat üresen.) **10 pont**

1. megoldás: Egy csoportot legfeljebb 4 személy alkothat, hiszen ellenkező esetben a skatulyaelv miatt valamely házaspár két tagja egy csoportba kerülne. 1 pont

A csoportlétszámok eloszlására így a következő lehetőségek vannak: $(4, 3, 1)$, $(4, 2, 2)$ vagy $(3, 3, 2)$. 1 pont

Az első esetben a 4-fős csoportba mindegyik házaspárból csak az egyik tagot választhatjuk be, és ezt $2^4 = 16$-féleképpen tehetjük meg. A megmaradt személyek között már nincsenek házaspárok, és közülük az egyfős csoportba bárkit kiválaszthatunk. Ezért összesen $16 \cdot 4 = 64$ lehetőség adódik. 2 pont

A második esetben a 4-fős csoport tagjait ismét 16-féleképpen választhatjuk ki, majd a további 4 személyt (akik között már nincs házaspár) 3-féleképpen oszthatjuk be két 2-fős csoportba. Tehát ebben az esetben összesen $16 \cdot 3 = 48$ lehetőség adódik. 2 pont

A harmadik esetben az első 3 tagú csoportot $4 \cdot 2^3 = 32$-féleképpen állíthatjuk össze, ugyanis a négy házaspárból 4-féleképpen választhatunk ki hármat, majd a három kiválasztott házaspárból

2^3-féleképpen képezhetünk egy háromtagú csoportot. A további csoportosításhoz még öten maradnak, akik közül ketten házaspárok. Egyiküknek kell a 2-fős csoportba kerülnie, és mellé már bárki kerülhet. Ez a kétfős csoport kialakítására $2 \cdot 3 = 6$ -féle lehetőséget biztosít. A megmaradó személyek között már nincsenek házaspárok, így ők fogják alkotni a másik 3-fős csoportot.

Mivel a 3-fős csoportok sorrendje nem számít, így ebben az esetben összesen $\frac{32 \cdot 6}{2} = 96$ lehetőség adódik. 3 pont

Összesen tehát $64 + 48 + 96 = 208$-féleképpen oszthatjuk csoportokba a házaspárokat a feladat követelményeinek megfelelően. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás: Legyenek az egyik házaspár tagjai A és A^*! A feladat feltétele szerint nekik külön csoportba kell kerülniük. A 8 személy részére kialakított 3 társaságot osztályozzuk az alábbiak szerint:

- A csoportja,
- A^* csoportja,
- A és A^*-ot sem tartalmazó csoport. 2 pont

A többi családnál a házaspár egyik másik tagjánál még szabadon eldönthetjük, hogy őt a három csoport közül melyikbe helyezzük el, de ezután a házaspár másik tagját már csak a maradék két csoportba oszthatjuk be. Így minden házaspár esetén $2 \cdot 3 = 6$, összesen pedig $6^3 = 216$ lehetőség adódik az emberek besorolására. 4 pont

Az így kiszámolt 216 eset között viszont vannak olyan esetek is, amikor a 3. csoport üres marad, mivel ekkor a házastársak felváltva az első két társaságban nyernek elhelyezést.

Ezen esetek száma $2^3 = 8$, mivel a házaspárok egyik tagjáról még eldönthetjük, hogy ő A vagy A^* mellé kerül, de a párja már csak a másik csoport tagja lehet. 2 pont

Tehát összesen $216 - 8 = 208$ megfelelő elosztás lehetséges. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Dávid választ két különböző a és b pozitív egész számot, majd felírja a füzetébe az a, $a + 2$, b, $b + 2$ számokat. Ezután képezi az összes páronkénti szorzatot, és a kapott hat számot felírja a táblára. Hány négyzetszám kerülhet fel a táblára? **10 pont**

Megoldás: A táblára került négyzetszámok száma lehet:

0, például: $a = 1$ és $b = 5$ esetén: a 3, 5, 7, 15, 21, 35 szorzatok egyike sem négyzetszám. 1 pont

1, például: $a = 1$ és $b = 2$ esetén: a 2, 3, 4, 6, 8, 12 szorzatok közül a 4 az egyetlen négyzetszám. 1 pont

2, például: $a = 1$ és $b = 25$ esetén: a 3, 25, 27, 75, 81, 675 szorzatok közül a 25 és a 81 négyzetszám. 1 pont

A következőkben megmutatjuk, hogy kettőnél több négyzetszám nem kerülhet a táblára:

Tetszőleges $a \neq b$ pozitív számok esetén $a(a+2)$ és $b(b+2)$ egyike sem lehet négyzetszám, hiszen

$$a^2 < a^2 + 2a = a(a+2) < a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$
$$b^2 < b^2 + 2b = b(b+2) < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$$

2 pont

1. eset: ab négyzetszám.

Ekkor az $a(b+2)$ és $b(a+2)$ szorzatok közül egyik sem lehet négyzetszám.

Közülük bármelyik pontosan akkor lehetne négyzetszám, ha ab-vel vett szorzata is négyzetszám lenne $(*)$.

Viszont az $ab \cdot a(b+2) = a^2b(b+2)$ átalakítás, és a korábbi gondolatmenet alapján a kapott kifejezés értéke nem lehet négyzetszám. 2 pont

2. eset: ab nem négyzetszám.

Ekkor az $a(b+2)$, $b(a+2)$, $(a+2)(b+2)$ számok közül legfeljebb kettő lehet négyzetszám.

Ennek igazolásához elég belátni, hogy például az $a(b+2)$ és $(a+2)(b+2)$ szorzatpárból legfeljebb az egyik lehet négyzetszám. Ha mindkettő négyzetszám lenne, akkor a szorzatuk is négyzetszám lenne. $(*)$

Viszont az $a(b+2) \cdot (a+2)(b+2) = a(a+2)(b+2)^2$ átalakítás, és a korábbi gondolatmenet alapján a kapott kifejezés értéke nem lehet négyzetszám. 2 pont

A $(*)$-gal jelölt gondolat megfogalmazása, és annak valamelyik részben történő helyes alkalmazása. 1 pont

Összesen: **10 pont**