**Bolyai János
Matematikai Társulat**

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg a $|36^n - 5^k|$ kifejezés legkisebb értékét, ahol n és k pozitív egész számok. **7 pont**

Megoldás. Minden pozitív egész n és k esetén 36^n hatra, 5^k ötre végződik.
Így $|36^n - 5^k|$ utolsó jegye $36^n > 5^k$ esetén 1-es, $36^n < 5^k$ esetén 9-es. 2 pont
$|36^n - 5^k|$ értéke nem lehet 1, mert ha $36^n - 5^k = 1$, akkor $36^n - 1 = 5^k$. Mivel $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés osztható 35-tel, azaz 7-tel is, de a jobb oldalon álló kifejezés biztosan nem osztható 7-tel. Így az egyenlőség nem állhat fenn. 2 pont
$|36^n - 5^k|$ értéke nem lehet 9, mert ha $36^n - 5^k = -9$, akkor $36^n + 9 = 5^k$. Az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés osztható 9-cel, de a jobb oldalon álló kifejezés biztosan nem osztható 9-cel. Így az egyenlőség nem állhat fenn. 2 pont
A következő szám a 11, $|36^n - 5^k|$ értéke felveszi ezt a számot, mégpedig $n = 1$, $k = 2$ esetben. Tehát a feladat megoldása: 11. 1 pont

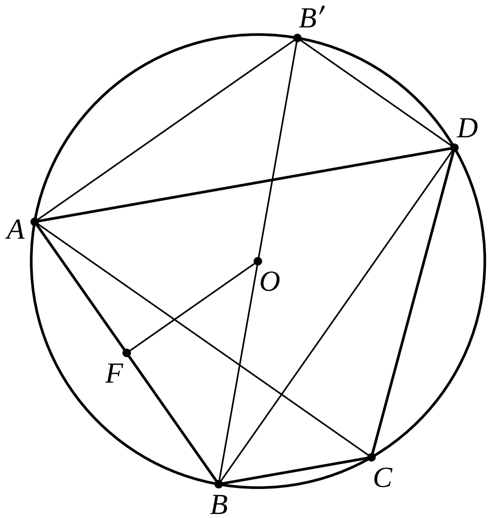
Összesen: **7 pont**

2. Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egészekből álló 10-elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek mindig van két olyan, közös elemek nélküli nemüres részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő. (Ha egy halmazba egyetlen elem kerül, az összeg az elem maga.) **7 pont**

Megoldás. Legyen A egy tetszőleges részhalmaz. Az A-beli elemek összege legalább 0 és legfeljebb 945, így az elemek összegeként legfeljebb 945 különböző érték jöhet ki. 2 pont
Az elemekből képezhető összes különböző részhalmaz száma $2^{10} = 1024$, így a skatulya-elv alapján biztosan van legalább két különböző részhalmaz, amelyekben ugyanannyi az elemek összege. 2 pont
Vegyünk két ilyen részhalmazt! Hagyjuk el ezekből a közös elemeket (ha vannak), így mindkét részhalmazban ugyanannyival csökkentettük az elemek összegét, de egyik sem lesz üres, mert az azt jelentené, hogy eredendően egyenlő volt a két halmaz. 2 pont
Mivel a korábban egyenlő összegek ugyanannyival csökkentek, az elemek összege továbbra is egyenlő, közös elemek nincsenek, így éppen a feladat feltételének megfelelő két részhalmazt kaptunk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

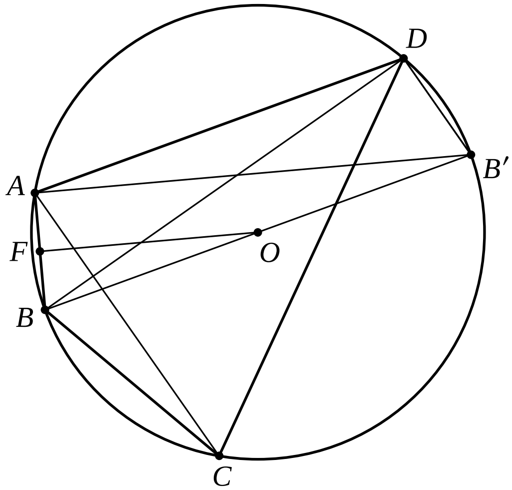
3. Az $ABCD$ négyszög csúcsai rajta vannak a k körön. A négyszög AC és BD átlója merőleges egymásra. A k kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsuk be, hogy $CD = 2 \cdot OF$. **7 pont**



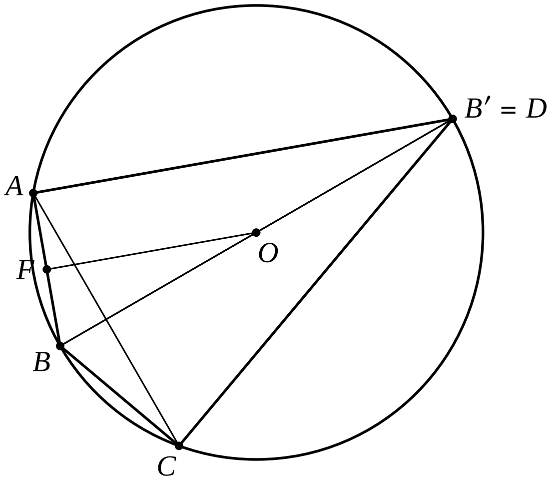
1. ábra

1. megoldás. Legyen a B pont O-ra vonatkozó tükörképe B'. Vizsgáljuk meg az $AB'DC$ négyszöget.
Ebben a négyszögben $AB' = 2 \cdot OF$, mert az OF középvonal az $AB'B$ háromszögben. Azt kell tehát belátni, hogy $AB' = CD$. 1 pont
Mivel BB' a k kör átmérője, ezért a Thálesz-tétel miatt a BD és $B'D$ merőleges egymásra. 1 pont
Mivel AC is merőleges BD-re, ezért $B'D$ és AC párhuzamosak egymással, tehát az $AB'DC$ négyszög trapéz. 1 pont
Mivel az $AB'DC$ trapéz csúcsai rajta vannak a k körön, így ez egy húrtrapéz. A húrtrapéz szárai egyenlő hosszúak, tehát $AB' = CD$, így korábbi megjegyzésünk alapján készen vagyunk. 1 pont

Nem biztos, hogy az A, B', D, C pontok ebben a sorrendben jönnek egymás után a körön: az is lehet, hogy B' és D fordított sorrendben vannak (2. ábra). Ilyenkor a fentiek az $ADB'C$ négyszögre mondhatók el. Ugyanígy kijön, hogy a négyszög húrtrapéz, ám most azt a tulajdonságát használjuk a húrtrapéznak, hogy az átlói egyforma hosszúak. 2 pont



2. ábra

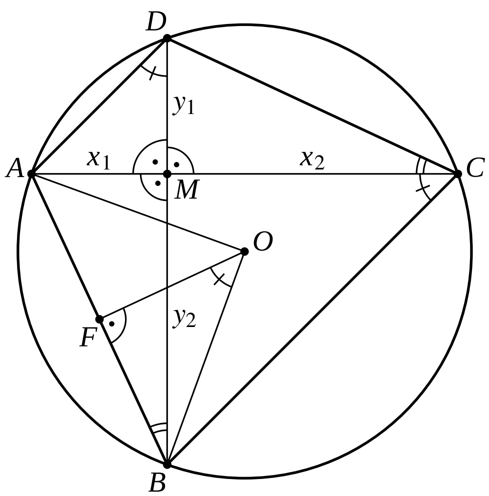


3. ábra

Végül az is lehet, hogy B' és D egybeesnek (3. ábra). Ilyenkor az eredeti négyszög egy deltoid (BD átmérő a körben), és $AB'C$ egy egyenlő szárú háromszög, és emiatt vagyunk készen. 1 pont

Megjegyzés. Ha a megoldó nem gondol rá, hogy az ábra többféle módon is kinézhet, csak 4 pontot kaphat a gondolatmenetért.

Összesen: **7 pont**



2. megoldás. A kerületi szögek tétele alapján $ACD\sphericalangle =$ $= DBA\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AOB\sphericalangle =$ $= 2 \cdot ACB\sphericalangle = 2 \cdot ADB\sphericalangle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögekről van szó. 1 pont

De $FOB\sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot AOB\sphericalangle$, hiszen F az AOB egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja, így FO az alaphoz tartozó magasság, ami felezi a szárszöget.

Így $FOB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$. 1 pont

Ekkor AMD háromszög hasonló BFO háromszöghöz, mert szögeik egyenlők. 1 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva: $\dfrac{OF}{\frac{1}{2}AB} = \dfrac{y_1}{x_1}$, ebből

$$2 \cdot OF = AB \cdot \frac{y_1}{x_1}. \qquad (1)$$ 1 pont

CDM háromszög hasonló BAM háromszöghöz, mert szögeik egyenlők. 1 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva: $\dfrac{CD}{y_1} = \dfrac{AB}{x_1}$, ebből

$$CD = AB \cdot \frac{y_1}{x_1} \qquad (2)$$

Ekkor (1) és (2) feltételek alapján: $CD = 2 \cdot OF$ 1 pont

Megjegyzés. Az átlók merőlegessége miatt a kör középpontja mindig a négyszög belsejében van.

Összesen: **7 pont**

4. A $[0; 12]$ intervallumban levő x, y valós számokra teljesül, hogy $xy = (12 - x)^2 \cdot (12 - y)^2$. Mekkora az xy szorzat legnagyobb értéke? **7 pont**

Megoldás. Az egyenlet két oldalán nemnegatív számok állnak, így gyököt vonhatunk. Mivel x és y a $[0; 12]$ intervallumban vannak, a jobb oldal négyzetgyöke

$$(12 - x) \cdot (12 - y) = 12^2 - 12(x + y) + xy.$$ 1 pont

Így azt kapjuk, hogy $\sqrt{xy} = 12^2 - 12(x + y) + xy = 12^2 - 24 \cdot \dfrac{x + y}{2} + xy$. 1 pont

A jobb oldal nem csökken, ha x és y számtani közepe helyére az annál nem nagyobb mértani középük írjuk: $\sqrt{xy} \leqslant 144 - 24\sqrt{xy} + xy$. 1 pont

Ez a $\sqrt{xy} = z$ helyettesítéssel a $0 \leqslant 144 - 25z + z^2$ egyenlőtlenségnek felel meg. 1 pont

Mivel $0 \leqslant z = \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x + y}{2} \leqslant 12$, azért a z változó is a $[0; 12]$ intervallumba esik. Ezen a halmazon a $0 \leqslant z^2 - 25x + 144 = (z - 9) \cdot (z - 16)$ egyenlőtlenség megoldása a $[0; 9]$ intervallum. Ebből következik, hogy a feladat változóira $\sqrt{xy} \leqslant 9$, azaz $xy \leqslant 81$. 2 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenlőség az $x = y = 9$ esetben fennáll, tehát az xy szorzat legnagyobb értéke 81. 1 pont

Összesen: **7 pont**