Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ paralelogrammában a D csúcsból merőlegest állítunk a C csúcsot az AB oldal E felezőpontjával összekötő szakaszra. A merőleges talppontja G, amely belső pontja a CE szakasznak. Mekkora az AG szakasz hossza, ha $AB = 10$ cm és $AD = 6$ cm? **10 pont**

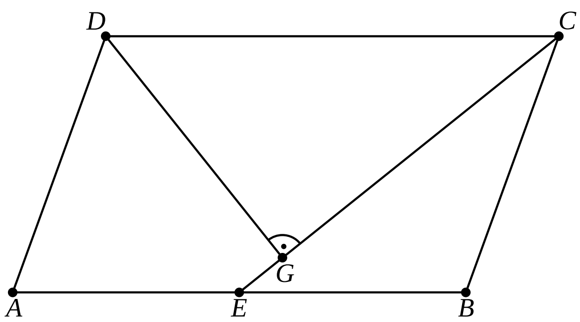
2. Elhelyeztünk 111 érmét egy $n \times n$-es négyzetrács ($n \geqslant 2$) mezőibe úgy, hogy az élszomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőkbe tett érmék számának különbsége 1, és minden mezőre került érme. Határozzuk meg n lehetséges értékeit! **10 pont**

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre a $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^n$ kifejezés értéke négyzetszám? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ paralelogrammában a D csúcsból merőlegest állítunk a C csúcsot az AB oldal E felezőpontjával összekötő szakaszra. A merőleges talppontja G, amely belső pontja a CE szakasznak. Mekkora az AG szakasz hossza, ha $AB = 10$ cm és $AD = 6$ cm? **10 pont**

1. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Jelölje F a CD oldal felezőpontját. A G-nél lévő derékszög miatt G rajta van a CD átmérőjű Thalész-körön, így $CF = FD = FG$. 2 pont

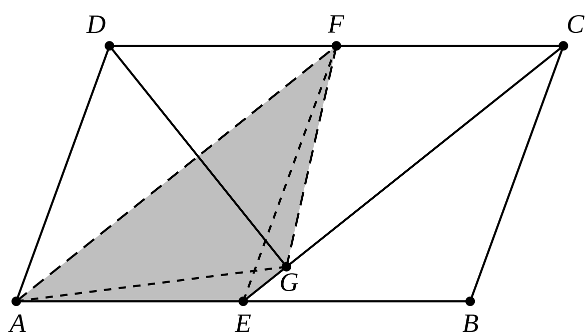
Mivel AE és CF egymással párhuzamos és egyenlő hosszúságú szakaszok, ezért az $AECF$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Emiatt AF és EG egymással párhuzamosak, tehát az $AEGF$ négyszög trapéz. 2 pont

Sőt, az $AEGF$ trapéz szimmetrikus (más szóval húrtrapéz), mert $AE = FG$ miatt a szárai egyenlő hosszúak, és nem paralelogramma, hiszen G belső pontja CE-nek. 2 pont

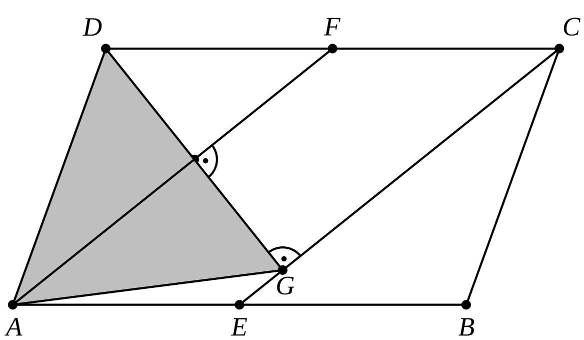
Az $AEGF$ trapéz szimmetriájából adódóan az átlói egyenlő hosszúak, ezért $AG = EF = AD$. 1 pont

Tehát az AG szakasz 6 cm hosszú. 1 pont



Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát. (Lásd az 1. megoldás első ábráját.) 1 pont



Jelölje F a CD oldal felezőpontját. Mivel AE és CF egymással párhuzamos és egyenlő hosszúságú szakaszok, ezért az $AECF$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Emiatt AF és EG egymással párhuzamosak. 1 pont

Ebből következően az AF egyenes merőleges a GD szakaszra, másrészt az AF egyenes a GCD háromszögben a középvonal egyenese. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy az AGD háromszögben az AF magasságvonal felezi a GD oldalt, vagyis oldalfelező merőleges egyben. 2 pont

Ez csak úgy lehetséges, hogy az AGD háromszög egyenlő szárú, vagyis $AG = AD$. 2 pont

Tehát az AG szakasz 6 cm hosszú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Elhelyeztünk 111 érmét egy $n \times n$-es négyzetrács ($n \geqslant 2$) mezőibe úgy, hogy az élszomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőkbe tett érmék számának különbsége 1, és minden mezőre került érme. Határozzuk meg n lehetséges értékeit! **10 pont**

Megoldás. Színezzük sakktáblaszerűen fehérre és feketére a négyzetrács mezőit!
Ha egy fehér mezőn páros az érmék száma, akkor a mellette lévő fekete mezőkön páratlan számú érme van, amelyek mellett a fehéreken ismét páros számú stb. Azaz a sakktáblán az összes fehér mezőn páros, az összes feketén páratlan számú érme van. (Vagy fordítva.) 1 pont
$n = 2$ és más páros n esetén nem létezik jó elrendezés, mivel páros n esetén n^2 fele is páros, azaz páros számú olyan mező van, amelyen páratlan számú érme van, tehát az érmék összegének is párosnak kellene lennie. 2 pont
Páratlan n esetén a sarokmezőkön és a velük egyező színű mezőkön van páratlan számú, így ezeken kell páratlan számú érmének lennie, hogy páratlan legyen az érmék számának összege.
$n = 3$, 5 és 7 esetén létezik jó elrendezés.
Példák: A példákban a sarokmezők és a velük egyező színű mezők lesznek a fekete mezők.
$n = 3$ – A 4 fehér mezőre tegyünk 12-12 érmét, 4 feketére 13-13-at, egyre pedig 11-et.
$n = 5$ – A 12 fehér mezőre tegyünk 4-4 érmét, 12 feketére 5-5-öt, egyre pedig 3-at.
$n = 7$ – A 24 fehér mezőre tegyünk 2-2 érmét, 19 feketére 3-3-at, 6-ra pedig 1-1-et. 4 pont*
Mivel $n \geq 9$ esetén legalább $41 + 2 \cdot 40 = 121$ érmét kell elhelyezni, ezért csak $n \leq 7$ lehetséges. 2 pont
Tehát n lehetséges értékei: $n = 3, 5, 7$. 1 pont
* A 4 pont bontása: Egy helyes konstrukcióért 2 pont, minden továbbiért 1-1 pont adható.

Összesen: **10 pont**

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre a $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^n$ kifejezés értéke négyzetszám? **10 pont**

Megoldás. Olyan $(x; n)$ számpárt keresünk $(x, n \in \mathbb{Z}^+)$ (*), amelyre a $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^n = x^2$ egyenlőség fennáll. 1 pont

Az első két tag összege négyzetszám: $2^8 + 5 \cdot 2^6 = 256 + 5 \cdot 64 = 576 = 24^2$.

Erre az alábbi átalakítás után is juthatunk: $2^8 + 5 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (2^2 + 5) = 2^6 \cdot 9 = (2^3 \cdot 3)^2$. 2 pont

A kapott egyenletet rendezzük: $2^n = x^2 - 24^2$ (tehát $x > 24$), 1 pont

majd alakítsuk szorzattá a jobb oldalon kapott kifejezést $2^n = (x - 24) \cdot (x + 24)$. 1 pont

A bal oldalon egy kettőhatvány áll, a jobb oldalon két pozitív egész szám szorzata. Így a jobb oldalon szereplő két tényezőnek is kettőhatványnak (megengedve a $2^0 = 1$ tényezőt is) kell lennie. 1 pont

A jobb oldalon álló két tényező különbsége 48. Két pozitív kettőhatvány különbsége pontosan akkor 48, ha ezek a 64 és a 16. 1 pont

Tehát $x - 24 = 16 = 2^4$ és $x + 24 = 64 = 2^6$, azaz $x = 40$, és $2^n = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$, azaz $n = 10$. 1 pont

Válasz: a feladat egyetlen megoldása: $n = 10$. 1 pont

Ellenőrzés: $n = 10$-re tehát valóban négyzetszámot kapunk: $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^{10} = 1600 = 40^2$. 1 pont

(*) az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy x pozitív egész.

Összesen: **10 pont**