

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. **7 pont**
2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T . Az átfogón kijelöljük a P és a Q pontokat úgy, hogy $AP = AC$ és $BQ = BC$ legyen. Az AC befogón az M , az BC befogón az N pontot úgy jelöljük ki, hogy $CM = CT = CN$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a $QPNCM$ ötszög területének és az ABC háromszög területének aránya $2r : R$, ahol r az ABC háromszög beírt körének a sugara, R pedig a köré írt körének a sugara. **7 pont**
3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. **7 pont**