Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév
Haladók III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Jelölje $[a;b]$ az a és b pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Legyen n olyan pozitív egész szám, amelyre

$$[n;n+1] > [n;n+2] > [n;n+3] > \cdots > [n;n+9].$$

Bizonyítsuk be, hogy $[n;n+9] > [n;n+10]$. **7 pont**

2. Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének a kétharmad része! **7 pont**

3. Az a_n sorozat a következő rekurzióval adott:

$$a_1 = 1; \quad a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Legyen továbbá $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Igazoljuk, hogy

$$2020 \mid s_{100} + 1.$$ **7 pont**

4. Legyen n pozitív egész szám, jelölje $h(n)$ azt, hogy n hányféleképpen áll elő a 3 hatványainak összegeként. Mennyi a

$$h(2020) - \big(h(673) + h(672) + h(671) + \ldots h(1)\big)$$

különbség?

(Itt 3 hatványán 3-nak nemnegatív egész kitevőjű hatványait értjük. Ha két előállítás csak a tagok sorrendjében különbözik, akkor e két előállítást nem különböztetjük meg.) **7 pont**

5. Egy $ABCD$ érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Az ACD és ABC háromszögek beírt köreinek középpontja F és E. Az AEF háromszög köréírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy A, O és K egy egyenesen vannak! **7 pont**