Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

1. Felírtunk a táblára 2^n darab pozitív egész számot tetszőleges sorrendben egymás után. Ezen számok összes prímosztója n prím közül kerül ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható ezen számok egy nem üres részhalmaza, amelynek elemei a felírt sorban egymást utániak, és a részhalmaz elemeinek szorzata négyzetszám! **7 pont**

2. Az x, y, z pozitív valós számok szorzata 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$K(x,y,z) = \frac{x}{y+z+3} + \frac{y}{x+z+3} + \frac{z}{x+y+3} \geq \frac{3}{5}$$ **7 pont**

3. Az ABC háromszög belsejében található D pontra $CAD\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 30^\circ$ és $ABD\sphericalangle = 60^\circ$. Legyen E a BC oldal felezőpontja, F pedig a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Igazoljuk, hogy $DE \perp EF$. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Felírtunk a táblára 2^n darab pozitív egész számot tetszőleges sorrendben egymás után. Ezen számok összes prímosztója n prím közül kerül ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható ezen számok egy nem üres részhalmaza, amelynek elemei a felírt sorban egymást utániak, és a részhalmaz elemeinek szorzata négyzetszám! **7 pont**

Megoldás. Legyenek ezek a számok $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ($k = 2^n$), a szereplő prímek $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Jelöljük c_l-lel az első l darab d_i szorzatát, azaz $c_l = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_l$. 1 pont

Mindegyik c_l-t írjunk fel prímhatványok szorzataként kanonikus alakban. Mindegyik c_l-hez tartozik egy n hosszú sorozat. Ebben a sorozatban az i-edik helyre nullát írunk, ha c_l-ben p_i páros hatványon szerepel és 1-et írunk, ha páratlanon. 2 pont

Így 2^n darab 0-1 sorozatot kapunk, pontosan annyit, ahányféle lehetséges. 1 pont

Ha ezek között van csupa 0 sorozat, akkor készen vagyunk, mert valamelyik c_l-ben minden prím páros hatványon szerepel, ezért ez négyzetszám. 1 pont

Ha nincs ilyen, akkor a skatulyaelv miatt van két egyforma sorozat. Ha a nagyobb indexhez tartozót elosztjuk a kisebb indexhez tartozóval, akkor az egyszerűsítés után olyan számot kapunk, amely egymást követő számok szorzata és minden prím páros hatványon szerepel benne, tehát négyzetszám. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az x, y, z pozitív valós számok szorzata 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$K(x,y,z)=\frac{x}{y+z+3}+\frac{y}{x+z+3}+\frac{z}{x+y+3}\geq\frac{3}{5}$$ **7 pont**

Megoldás.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz},\qquad \text{ezért}\qquad x+y+z\geq 3.$$ 1 pont

A nevezőbeli 3-at ezzel helyettesítve a törtek nem nőnek, ezért foglalkozzunk

$$K(x,y,z)\geq L(x,y,z)=\frac{x}{y+z+x+y+z}+\frac{y}{x+z+x+y+z}+\frac{z}{x+y+x+y+z}\text{-vel.}$$ 1 pont

A nevezőket a-val, b-vel, c-vel jelöljük.

$$x+2y+2z=a;\qquad 2x+y+2z=b;\qquad 2x+2y+z=c.$$ 1 pont

Megoldjuk az egyenletrendszert x-re, y-ra, z-re, ekkor azt kapjuk, hogy

$$x=-\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{2}{5}c;\qquad y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c;\qquad z=\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}b-\frac{3}{5}c.$$ 2 pont

Ezekkel az új ismeretlenekkel a következőhöz jutunk:

$$\begin{aligned}L(x,y,z)&=\frac{-\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{2}{5}c}{a}+\frac{\frac{2}{5}a-\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c}{b}+\frac{\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}b-\frac{3}{5}c}{c}=\\&=-\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right).\end{aligned}$$

Mivel egy pozitív szám és reciproka összege legalább 2, ezért ez nagyobb vagy egyenlő, mint

$$K(x,y,z)\geq L(x,y,z)=-\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\cdot 6=\frac{3}{5}.$$ 2 pont

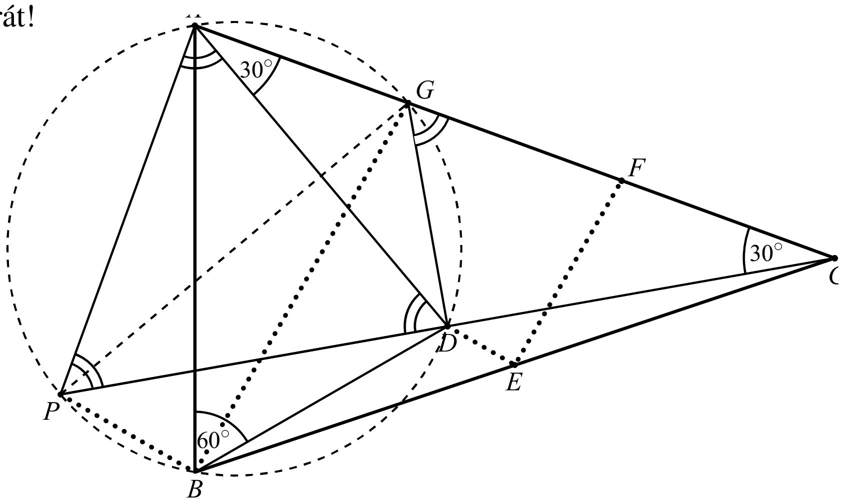
Az egyenlőség $x=y=z$ esetén áll fenn.

Összesen: **7 pont**

3. Az ABC háromszög belsejében található D pontra $CAD\sphericalangle=DCA\sphericalangle=30^\circ$ és $ABD\sphericalangle=60^\circ$. Legyen E a BC oldal felezőpontja, F pedig a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Igazoljuk, hogy $DE\perp EF$. **7 pont**

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A feladat feltételei szerint az ADC háromszög két szöge egyenlő, tehát egyenlő szárú (szárszögei 30°-osak, a D-nél lévő csúcsszöge 120°).

Legyen a C pont D-re vonatkozó középpontos tükörképe P. 2 pont

Ekkor $PD = CD = AD$ és $PDA\sphericalangle = 60^\circ$, mert az $ADC\sphericalangle$ külső szöge. Ezért az APD háromszög szabályos. Ebből következik, hogy a PAC háromszög félszabályos, a harmadik szöge ($PAC\sphericalangle$) derékszög. 1 pont

Mivel az AD szakaszra írt APD és ABD szög is 60°, azaz ugyanakkora húrhoz tartozó szögek és egyenlőek, az $APBD$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

Messe a köré írt kör az AC oldalt G-ben!

Láttuk, hogy $PAC\sphericalangle$ derékszög, ezért PG a kör átmérője. Emiatt $PDG\sphericalangle$ és így $CDG\sphericalangle$ is derékszög. A CDG (félszabályos) háromszögben tehát $2DG = GC$.

$PDA\sphericalangle = 60^\circ$, $PDG\sphericalangle = 90^\circ$ (mert PG átmérő), ezért $ADG\sphericalangle = 30^\circ$, tehát PG az ADG háromszög (sőt, $AP = DP$ miatt az $APDG$ húrnégyszög) szimmetriatengelye. 1 pont

Azaz $AG = DG$, így $2AG = 2DG = GC$, azaz G harmadolja az AC oldalt, más szóval G az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. 1 pont

Mivel F a C-hez közelebbi harmadolópont, ezért a C középpontú 2-szeres nagyítás F-et G-be, D-t P-be, E-t B-ve viszi, vagyis az FED háromszöget a GBP háromszögbe, amelyben az $FED\sphericalangle$-nek megfelelő $GBP\sphericalangle$ derékszög, így az $FED\sphericalangle$ is az.

Tehát DE valóban merőleges EF-re. 1 pont

Összesen: 7 pont