Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév
Kezdők I–II. kategória, 2. forduló
Kezdők III. kategória, 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 5-tel osztva 2, 7-tel osztva 3, 11-gyel osztva pedig 5 maradékot ad? **6 pont**

Megoldás. A keresett számot x-szel jelölve, $x = 5k+2$, $x = 7l+3$, illetve $x = 11m+5$ alakban írható, ahol k, l, valamint m nemnegatív egész számok. 1 pont

Tekintsük az $y = 2x+1$ kifejezést. Mivel az $y = 2x+1$ kifejezés szigorúan monoton növő, x pontosan akkor minimális, amikor y. 2 pont

Az $y = 2x+1$ kifejezés $10k+5 = 5(2k+1)$, $14l+7 = 7(2l+1)$, valamint

$$22m+11 = 11(2m+1)$$

alakú, tehát osztható 5-tel, 7-tel és 11-gyel. 1 pont

Az y kifejezés minimuma tehát az 5, 7 és 11 legkisebb közös többszöröse. Mivel a három szám páronként relatív prím, a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk, azaz y minimális értéke $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. 1 pont

Így x minimuma $\dfrac{385-1}{2} = 192$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző megállapítja, hogy a keresett szám $11m+5$ alakú, majd $m = 0$, 1, 2, …, 16-ra teszteli az értékeket, és minden esetben jelzi, hogy melyik másik feltétel nem teljesül, ezt követően pedig megállapítja, hogy $m = 17$ a feltételeknek megfelel, és így jut helyes eredményre, maximális pontot kap (ugyanez érvényes, ha akár az $5k+2$, akár a $7l+3$ alakból indul ki).

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán:

$$\frac{1}{a} = 2b+1-b^2-a.$$ **6 pont**

1. megoldás.

Az egyenletet átrendezve, majd a jobb oldalt teljes négyzetté alakítva a következő egyenletet kapjuk: $a+\frac{1}{a}=-(b-1)^2+2$. 2 pont

Ha a pozitív, akkor tudjuk, hogy $a+\frac{1}{a}\geq 2$. 1 pont

Minden b valós szám esetén $(b-1)^2\geq 0$, így $-(b-1)^2\leq 0$, amiből $-(b-1)^2+2\leq 2$. 1 pont

A kapott feltételek alapján: $2\leq a+\frac{1}{a}=-(b-1)^2+2\leq 2$. Ebből következően egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $a+\frac{1}{a}=-(b-1)^2+2=2$. 1 pont

Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b=1$. Mivel mindkét kapott szám pozitív, így az egyenletet igazzá tevő egyetlen számpár az $(1,1)$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát a-val szorozva, majd (a^2-2a)-t hozzáadva a következő egyenlőséget kapjuk: $a^2-2a+1=2ab-ab^2-a$. A jobb oldalon $(-a)$-t kiemelve és mindkét oldalon teljes négyzetté alakítva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(a-1)^2=-a(b-1)^2.$$ 3 pont

$(a-1)^2\geq 0$ és $(b-1)^2\geq 0$, valamint mivel a pozitív, ezért $-a<0$, és $-a(b-1)^2\leq 0$. 1 pont

Így a következőt kapjuk: $0\leq (a-1)^2=-a(b-1)^2\leq 0$.

Ebből következően egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $(a-1)^2=-a(b-1)^2=0$. 1 pont

Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b=1$. Mivel mindkét kapott érték pozitív, az egyenletet igazzá tevő egyetlen számpár az $(1,1)$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. megoldás. Rendezzük 0-ra a kifejezést: $b^2-2b+a+\frac{1}{a}-1=0$. 1 pont

Egészítsük ki a b^2-2b kifejezést teljes négyzetté: $\left(b^2-2b+1\right)+\left(a+\frac{1}{a}-2\right)=0$. 1 pont

Vegyük észre, hogy a második zárójeles kifejezés éppen $\left(a+\frac{1}{a}-2\right)=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$. 1 pont

(Mivel a nemnegatív, $\sqrt{a}$ létezik.) Eszerint $(b-1)^2+\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=0$. 1 pont

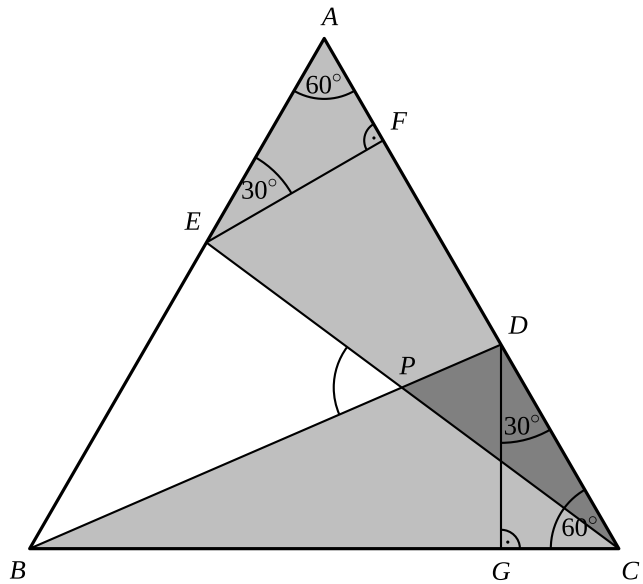
Két nemnegatív szám összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. 1 pont

Ekkor $b=1$, $\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, ahonnan $a=1$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Az ABC szabályos háromszögben D és E rendre az AC és AB oldalak pontjai, P pedig a BD és CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg a BPE szög nagyságát, ha az $AEPD$ négyszög és a BCP háromszög területe egyenlő. **8 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Egészítsük ki az $AEPD$ négyszöget és a BCP háromszöget is a PDC háromszöggel. Ekkor $T_{AEPD} = T_{BCP}$ pontosan akkor teljesül, ha $T_{CAE} = T_{BCD}$. 1 pont

Mivel a CAE és a BCD háromszögek CA és BC oldalai egyenlők, ezért a területük egyenlősége alapján az említett oldalakhoz tartozó magasságok is egyenlő hosszúságúak. 1 pont

Legyenek ezek a magasságok EF és DG.

Az AEF és CDG félszabályos háromszögekben $EF = DG$ és az említett oldalakon fekvő szögek 90° és 30°. Így a két háromszög egybevágó és $AE = CD$. 2 pont

Ezt felhasználva, a CAE és BCD háromszögek is egybevágók, mivel $CA = BC$, $AE = CD$ és $CAE\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 60^\circ$. 2 pont

Az egybevágóság alapján $ECA\sphericalangle = DBC\sphericalangle$. 1 pont

Ezt az egyenlőséget és a külsőszög-tételt felhasználva:

$$BPE\sphericalangle = PBC\sphericalangle + BCP\sphericalangle = DBC\sphericalangle + BCE\sphericalangle = ECA\sphericalangle + BCE\sphericalangle = 60^\circ$$ 1 pont

Összesen: **8 pont**

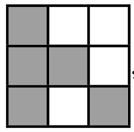
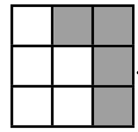
Megjegyzések. Ha valaki speciális helyzetű D és E pontok felvételével határozza meg a $BPE\sphericalangle$ nagyságát, akkor csak 1 pontot kaphat.

Ha a tanuló nem bizonyítja az AE és CD szakaszok hosszának egyenlőségét, akkor legfeljebb 6 pontot szerezhet.

Ha a tanuló arra hivatkozik (és indokolja), hogy a BCD háromszöget az ABC háromszög középpontja körüli 60°-os elforgatás viszi a CAE háromszögbe, akkor is kapja meg a teljes pontszámot.

4. Egy 3×3-as táblázat minden mezője fehér vagy szürke színű. Ezt a táblázatot újraszínezzük a következő szabály szerint:

- azok a mezők, amelyeknek páros számú (0, 2 vagy 4) oldalszomszédja szürke, szürkék lesznek;
- azok a mezők, amelyeknek páratlan számú (1 vagy 3) oldalszomszédja szürke, fehérek lesznek.

Ha például a kiindulási táblázat ez: , akkor ezt a táblázatot kapjuk: .

a) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője szürke! **4 pont**

b) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője fehér! **2 pont**

c) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyen az újraszínezést 2020-szor egymás után végrehajtva a kapott táblázat minden mezője szürke lesz! **4 pont**

Megoldás.

a) Számozzuk meg a táblázat mezőit az ábrán látható módon!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ha az 1-es mező az újraszínezés után szürke lesz, akkor neki vagy nulla, vagy két szomszédja szürke. Ha nulla szomszédja szürke, akkor fehér a 2-es és a 4-es mező, de akkor a 6-os és a 8-as mezőnek is fehérnek kell lennie ahhoz, hogy újraszínezéskor a 3-as és a 7-es mező is szürkére váltson. Ekkor a 9-es mező is szürke lesz, mert nulla szomszédja szürke. Hasonlóan kaphatjuk meg, hogy ha az 1-esnek két szomszédja szürke, azaz szürke a 2-es és 4-es, akkor a 6-os és a 8-as mezőnek is szürkének kell lennie.

Azaz a szürkére váltó színezésekben a 2*-es,* 4*-es,* 6*-os és* 8*-as mezők vagy mind fehérek, vagy mind szürkék.* 1 pont

Mindkét esetben teljesül, hogy az 5-ös mező is szürke lesz az újraszínezéskor, hiszen vagy nulla, vagy 4 szomszédja szürke.

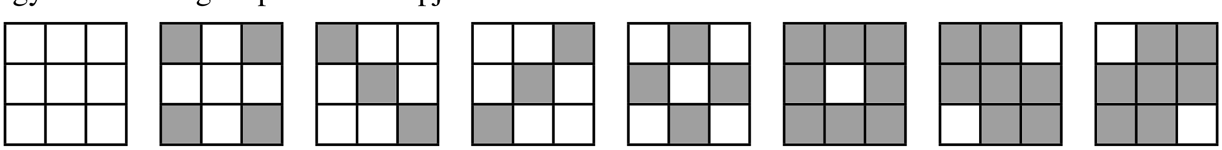
A 2-es mező akkor lesz szürke, ha nulla vagy két szomszédja szürke. Ha nulla szomszédja szürke, akkor az 1, 3 és 5 számokkal jelölt mezők fehérek. Ekkor a 7-es és 9-es mezőknek is fehéreknek kell lenniük, hogy a 4-es, 6-os és 8-as mezőknek is páros számú szürke szomszédja legyen.

Ha a 2-es mezőnek két szomszédja szürke, akkor az lehet

- 1-es és 3-as – ekkor a többi mező miatt a 7-es és a 9-es is szürke;
- 1-es és 5-ös – ekkor a többi mező miatt a 9-es is szürke;
- 3-as és 5-ös – ekkor a többi mező miatt a 7-es is szürke.

Azaz *a* 2*-es,* 4*-es,* 6*-os és* 8*-as szomszédai az* $(1,3,5,7,9)$*-es mezők négyféle színezést kaphatnak.* 1 pont

Így korábbi megállapításaink alapján $2 \cdot 4 = 8$ kiindulási táblázat vált szürkére:



2 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző mindenféle indoklás nélkül adja meg a 8 táblázatot, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat. Ha legalább két különböző kiindulási táblázatot talál, akkor már kaphat 1 pontot erre a feladatrészre a feladat helyes értelmezéséért.

b) Most is az előző ábra számozását használjuk.

Az 1-es mező akkor lesz fehér, ha pontosan 1 szomszédja szürke. Legyen ez például a 2-es. Ekkor a 4-es és 6-os mezőknek fehérnek, viszont a 8-as mezőnek szürkének kell lennie, hogy a 3-as, 7-es és 9-es mezőknek is pontosan egy szürke szomszédjuk legyen. Ekkor viszont az 5-ös mezőnek pontosan 2 szürke szomszédja van, azaz újraszínezéskor szürkének kell lennie. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha a 4-es mezőről feltételezzük, hogy szürke. 1 pont

Tehát nincs olyan kiindulási táblázat, amely újraszínezés után fehér lesz. 1 pont

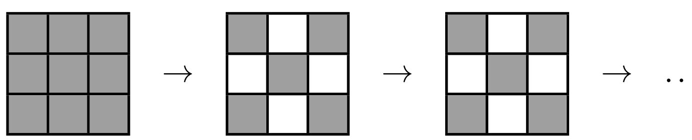
Megjegyzés. Ha a versenyző mindenféle indoklás nélkül közli, hogy nincs megfelelő táblázat, akkor 1 pontot kapjon.

c) A táblázatot összesen $2^9 = 512$-féleképpen színezhetjük ki. 1 pont

Így az első 512 lépés alatt legalább egy színezésnek ismétlődnie kellett. A két azonos színezést azonban ugyanolyan színezés követi, így a színezések sorozata innen periodikusan ismétlődik. 1 pont

Ha ebben a periódusban nincsen teljesen szürke táblázat, akkor nem kaphatunk teljesen szürkét a 2020. lépés után sem. 1 pont

Ha viszont van benne teljesen szürke, akkor az azt követő lépésekben így folytatódik a tábla színezése:



Azaz a következő lépésekben már végig ugyanaz a táblázat ismétlődik. Így ebben az esetben sem kaphatunk a 2020. lépés után teljesen szürkét. 1 pont

Összesen: 10 pont

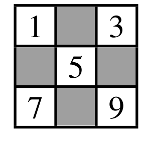
Az *a)* rész egy másik lehetséges megoldása.

a) Számozzuk meg a táblázat mezőit az ábrán látható módon!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ha az 1-es mező az újraszínezés után szürke lesz, akkor annak a kiindulási helyzetben 0 vagy 2 szomszédja szürke, azaz a két oldalszomszédja egyszínű.

1. eset. Ha a kiindulási helyzetben az 1-es mező 2 szomszédja szürke, akkor a 2-es és a 4-es mező eredetileg szürke. Ebből következik, hogy a kiindulási helyzetben a 3-as, a 6-os és a 9-es mezőnek is minden oldalszomszédja szürke kellett, hogy legyen hiszen a 2–6, 6–8 és 8–4 mezők páronként egyszínűek.



2. eset. Ha a kiindulási helyzetben az 1-es mező 0 szomszédja szürke, akkor a 2-es és a 4-es mező eredetileg fehér. Ebből következik, hogy a kiindulási helyzetben a 3-as, a 6-os és a 9-es mezőnek is minden oldalszomszédja fehér kellett, hogy legyen, hiszen a 2–6, 6–8 és 8–4 mezők páronként egyszínűek.

1		3
	5	
7		9

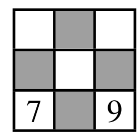
Azaz azokban a kiindulási helyzetekben, amelyekből egy lépésben történő újraszínezéssel minden mező szürke színű lesz, azokban a 2-es, 4-es, 6-os és 8-as mezők vagy mind szürkék vagy mind fehérek. 1 pont

(Láthatjuk, hogy az 5-ös mező kiindulási színétől függetlenül az újraszínezés után mindenképpen szürke lesz a színe, hiszen eredetileg 0 vagy 4, azaz páros sok oldalszomszédja szürke.)

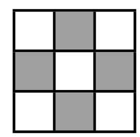
Vizsgáljuk meg a 2-es mező újraszínezését az első esetben! Ez a mező akkor lesz szürke az újraszínezés után, ha a kiindulási helyzetben nulla vagy két oldalszomszédja szürke a három oldalszomszédja közül.

1. eset, a) rész. Ha a 2-es mező egyik oldalszomszédja sem szürke, akkor az 1, 3 és 5 számú mezők a kiindulási helyzetben fehérek.

Ebből az következik, hogy a 6-os mező három oldalszomszédja is mind fehér kellett, hogy legyen eredetileg (hiszen 2 szürke oldalszomszédja már nem lehet, ha a 3-as és az 5-ös mező fehér). Ebből következik, hogy 8-as mező minden oldalszomszédja is fehér.

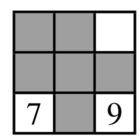


Tehát egyetlen kiindulási helyzet lehetséges:

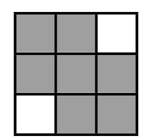


1 pont

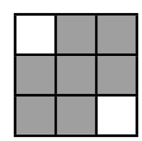
1. eset, b) rész. Ha a 2-es mező két oldalszomszédja szürke, akkor az 1, 3 és 5 számú mezők közül ki kell választanunk kettőt, ami a kiindulási helyzetben szürke. Ezt háromféleképpen tehetjük meg: csúcsban közös mezőket választunk szürke színűnek (1–5 vagy 3–5) vagy csúcsban nem közöseket (1–3).



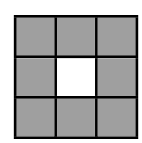
1–5 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek szürkének, a 4-es három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek fehérnek kell lennie:



1–5 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek fehérnek, a 4-es három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek szürkének kell lennie:



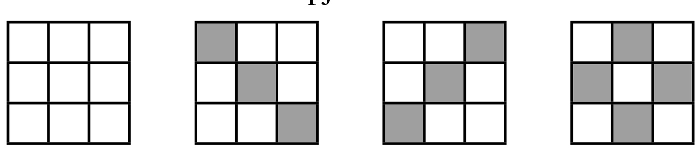
1–3 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek szürkének, a 4-es mező három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek szürkének kell lennie:



1 pont

A 2. esetben az 1. esetben látottakhoz hasonlóan tekinthetjük végig a lehetséges színezéseket.

Ezzel az alábbi négy kiindulási táblázatot kapjuk:



1 pont

5. Egy 30 csapatos bajnokságban eddig 14 fordulót rendeztek. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszott, mégpedig egy olyan csapattal, amellyel korábban még nem játszott. Igazoljuk, hogy van három olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzést sem játszottak le. **10 pont**

1. megoldás. Tekintsünk két olyan csapatot, amelyek még nem játszottak egymással. Legyenek ezek A és B. 1 pont

a) Ha azon csapatok közt, amelyekkel A és B már játszott, van közös, akkor ez a két csapat összesen legfeljebb 27 másikkal játszott. Ekkor A, B és ez a csapat teljesíti a feladat feltételeit. 1 pont

b) Vegyük azt az esetet, amikor nincsen olyan csapat, amelyik A-val és B-vel is játszott. 1 pont

Legyen A_1 és A_2 két olyan csapat, amelyekkel A játszott. Ha A_1 és A_2 között nem volt még mérkőzés, akkor rájuk igaz az *a)* bekezdésben leírt gondolatmenet, miszerint mivel mindketten játszottak A-val, ezért ketten együtt összesen legfeljebb 27 másik csapattal játszottak, tehát van olyan csapat, amelyikkel egyikük sem játszott. Ez a csapat, valamint A_1 és A_2 a feladat feltételeinek megfelelő három csapat. 2 pont

c) Tehát az az eset maradt, amikor nincs olyan csapat, amelyik A-val és B-vel is játszott, és amelyek játszottak A-val, azok mind játszottak egymással, és ugyanígy, amelyek játszottak B-vel, azok mind játszottak egymással is. Vagyis van két 15-15 csapatból álló csoport, amelyeken belül már mindenki mindenkivel játszott, de különböző csoportokba tartozó csapatok között nem volt mérkőzés. 1 pont

Megmutatjuk azonban, hogy ez az eset nem lehetséges, 1 pont

mert 15 csapatot nem lehet fordulónként párokba rendezni (egy mindig kimarad), és így a 14 forduló alatt nem játszhatott minden csapat 14 mérkőzést. 3 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Válasszunk ki egy csapatot (A), ez tizennégy mérkőzést játszott (ellenfelei: A_1, A_2, …, A_{14}). Nevezzük ezt a 15-öt első csoportnak, míg a többieket (B_1, B_2, …, B_{15}) másodiknak. 1 pont

Két eset fordulhat elő.

1. eset: Volt mérkőzés a két csoport között is. 1 pont

A nem vehetett részt ilyenben, így feltehető, hogy például A_1 és B_1 játszott egymással. B_1 is 14-szer játszott összesen, ezért nem mérkőzhetett meg mindenkivel a második csoportból, feltehetjük, hogy B_1 és B_2 között nem volt mérkőzés. 1 pont

Ekkor azonban az A, B_1, B_2 csapatok egymás között még nem játszottak egyetlen meccset sem: B_1 nem játszott B_2-vel, hiszen B_2-t így választottuk, A pedig nem játszott második csoportbeliekkel, azaz sem B_1-gyel, sem B_2-vel. 2 pont

2. eset: Minden mérkőzés az egyes csoportokon belül zajlott le. Ez azt jelentené, hogy a csoportokon belül mindenki játszott már mindenkivel, azaz két teljes 15 résztvevős körmérkőzés zajlott le 14 forduló alatt. 1 pont

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. 1 pont

Tekintsük csak az első csoportot. Mivel 15 csapatból áll, és ennyi résztvevőt nem lehet párokba állítani, így minden fordulóban valaki kimaradt volna. Ez azonban ellentmond annak, hogy mindenki játszott mindenkivel. A második eset tehát nem fordulhat elő. 3 pont

Összesen: **10 pont**